SCHAUM'S
ouTlines

全美经典学习指导系列

近代物理学

（原第二版）

〔美〕R. 戈特罗　W. 萨万 著

孙宗扬 译

486余道详细解答的习题

各种优秀教材的辅导材料

理想的考前复习资料

涵盖夸克与超导等内容

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

(O-1546.0101)
责任编辑：鄢德平

SCHAUM'S ouTlines

全球销量
超越3000万的
"全美经典学习指导系列"
是您的最佳
学习伴侣！



40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典学习指导系列

概率和统计
统计学
离散数学
Mathematica使用指南
数理金融引论
机械振动
微分方程
统计学原理（上）
统计学原理（下）
微积分
静力学与材料力学
有限元分析
传热学
近代物理学
2000工程热力学习题精解
工程力学
3000物理习题精解
流体动力学
物理学基础
材料力学
2000离散数学习题精解
工程热力学
数值分析
量子力学
有机化学习题精解
3000化学习题精解
大学化学习题精解
电路
电气工程基础
工程电磁场基础
数字信号处理
数字系统导论
数字原理
电机与机电学
基本电路分析
信号与系统
微生物学
生物化学
生物学
分子和细胞生物学
人体解剖与生理学

ISBN 7-03-009790-4



McGraw Hill

ISBN 7-03-009790-4/O·1546
定价：24.00元

全美经典学习指导系列

近代物理学

（原第二版）

〔美〕R. 戈特罗　W. 萨万　著

孙宗扬　译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

作为一本优秀的近代物理学辅导读物，本书的第一版曾被译成 4 种文字出版，受到读者的欢迎.

本书共分 6 部分 24 章，涵盖了狭义相对论、电磁辐射和物质的量子理论、氢原子、多电子原子、核物理以及原子系统等方面的内容. 一些章节还反映了基本粒子和超导领域的主要进展. 全书的每章开头都简要介绍了相关的原理、概念等，然后给出了大量的例题，这些例题有助于读者掌握相关的理论和解题技巧. 本书是各种近代物理学教程的补充.

读者为对物理知识要求较高的相关专业的本科生.

Ronald Gantreau, William Savin: Schaum's Outline of Theory and Problems of Modern Physics, Second Edition

ISBN: 0-07-024830-3

图字：01-2001-1758 号

图书在版编目（CIP）数据

近代物理学/（美）戈特罗，萨万著；孙宗扬译. —北京：科学出版社，2002
（全美经典学习指导系列）

ISBN 7-03-009790-4

Ⅰ. 近… Ⅱ. ①戈… ②萨… ③孙… Ⅲ. 物理学 Ⅳ. O41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 070190 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 2 月第 一 版 开本：A4(890×1240)

2002 年 2 月第一次印刷 印张：15 3/4

印数：1—4 000 字数：447 000

定价：24.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换（环伟））

序 言

近代物理包含了大致是20世纪所确立的课题.这些课题激动人心,有爱因斯坦狭义相对论所指出的时间效应,或者实际一些,基于固体能带理论的各种半导体元件.

本书的范围可以从目录上看出,每一章都先简单扼要地讲述原理,随之给出大批有详细解答的例题,它们自然地阐述了主题并且说明了原理.作者希望这些例题对学习会有裨益.解答比较扼要,点出关键之处,从易到难排列.后面还有未加解答的补充习题,但有答案,它可帮助读者检查自己对资料理解的程度.

读者需要读过标准的普通物理导论,本书主要与二年级或三年级水平相衔接,其中还有一些前沿性质的问题.本书可以当作是近代物理教程的补充,对于学习近代物理来说,本书是全面的并且是完备的.

我们特别感谢 David Beckwith,他对第一版做了细致的编辑工作,并且对清样做了改进.书中的错误由作者自己负责,并且祈望得到指正.最后,感谢我们的家庭在本书的长期准备中所给予的关怀.

R. 戈特罗
W. 萨 万
新泽西理工学院

目　录

第 I 部分　狭义相对论

第 1 章　伽利略变换 ……………………………… (1)
1.1　事件和坐标 ……………………………… (1)
1.2　伽利略坐标变换 ……………………………… (1)
1.3　伽利略速度变换 ……………………………… (1)
1.4　伽利略加速度变换 ……………………………… (2)
1.5　方程的不变性 ……………………………… (2)
第 2 章　爱因斯坦假说 ……………………………… (6)
2.1　绝对空间和以太 ……………………………… (6)
2.2　迈克耳孙-莫雷实验 ……………………………… (6)
2.3　长度和时间的测量——原理性问题 ……………………………… (6)
2.4　爱因斯坦假定 ……………………………… (6)
第 3 章　洛伦兹坐标变换 ……………………………… (10)
3.1　光速的不变性 ……………………………… (10)
3.2　在求解包含洛伦兹变换在内的问题的一般考虑 ……………………………… (10)
3.3　同时性 ……………………………… (11)
第 4 章　相对论长度收缩 ……………………………… (14)
4.1　长度定义 ……………………………… (14)
第 5 章　相对论时间延长 ……………………………… (16)
5.1　原时 ……………………………… (16)
5.2　时间延长 ……………………………… (16)
第 6 章　相对论时-空测量 ……………………………… (19)
第 7 章　相对论速度变换 ……………………………… (26)
7.1　洛伦兹速度变换和光速 ……………………………… (26)
7.2　在求解速度问题时的一般考虑 ……………………………… (26)
7.3　相对论多普勒效应 ……………………………… (26)
第 8 章　相对论中的质量、能量和动量 ……………………………… (32)
8.1　重新定义经典动量的需要 ……………………………… (32)
8.2　质量随速度的变化 ……………………………… (32)
8.3　在相对论中的牛顿第二定律 ……………………………… (32)
8.4　质量和能量关系：$E = mc^2$ ……………………………… (32)
8.5　动量和能量关系 ……………………………… (33)
8.6　能量和动量的单位 ……………………………… (33)
8.7　在求解质量-能量问题中的一般考虑 ……………………………… (33)

第 II 部分　电磁辐射和物质的量子理论

第 9 章　电磁辐射——光子 ……………………………… (41)
9.1　光子理论 ……………………………… (41)
9.2　光电效应 ……………………………… (41)
9.3　康普顿效应 ……………………………… (42)
9.4　对产生和对湮没 ……………………………… (43)

9.5 光子的吸收 …… (44)
第10章 物质波 …… (57)
10.1 德布罗意波 …… (57)
10.2 德布罗意假设的实验验证 …… (57)
10.3 德布罗意波的概率解释 …… (58)
10.4 海森伯测不准原理 …… (59)

第Ⅲ部分 类氢原子

第11章 玻尔原子 …… (72)
11.1 氢光谱 …… (72)
11.2 氢原子的玻尔理论 …… (72)
11.3 玻尔理论中辐射的放出 …… (73)
11.4 能级图 …… (73)
11.5 类氢原子 …… (74)
第12章 电子轨道运动 …… (82)
12.1 经典观念的轨道角动量 …… (82)
12.2 经典磁偶极矩 …… (82)
12.3 在外磁场中磁偶极矩的经典能量 …… (83)
12.4 塞曼实验 …… (83)
12.5 轨道动量矩大小的量子化 …… (83)
12.6 轨道角动量方向的量子化 …… (83)
12.7 塞曼效应的解释 …… (84)
第13章 电子自旋 …… (88)
13.1 斯特恩-盖拉赫实验 …… (88)
13.2 电子自旋 …… (88)
13.3 自旋-轨道耦合 …… (89)
13.4 精细结构 …… (89)
13.5 总角动量(矢量模型) …… (91)

第Ⅳ部分 多电子原子

第14章 泡利不相容原理 …… (94)
14.1 多于1个电子的量子力学系统 …… (94)
14.2 泡利不相容原理 …… (94)
14.3 在一维箱子中的单个质点 …… (94)
14.4 在一维箱子中的多个质点 …… (95)
第15章 多电子原子和周期表 …… (98)
15.1 原子中电子组态的光谱标记 …… (98)
15.2 周期表和原子壳层模型 …… (98)
15.3 原子态的光谱标记 …… (99)
15.4 原子激发态和 *LS* 耦合 …… (99)
15.5 反常塞曼效应 …… (100)
第16章 X射线 …… (110)
16.1 X射线装置 …… (110)
16.2 轫致辐射的产生 …… (110)
16.3 X射线特征谱线的产生 …… (111)

16.4　莫塞莱关系 …… (112)
16.5　X射线吸收边 …… (112)
16.6　俄歇效应 …… (113)
16.7　X射线荧光 …… (113)

第V部分　核物理

第17章　核的性质 …… (120)
17.1　核子 …… (120)
17.2　核力 …… (120)
17.3　氘 …… (120)
17.4　核 …… (121)
17.5　当作一个球的核 …… (121)
17.6　核结合能 …… (122)
第18章　核模型 …… (126)
18.1　液滴模型 …… (126)
18.2　壳层模型 …… (127)
第19章　不稳定核的衰变 …… (136)
19.1　核衰变 …… (136)
19.2　统计辐射衰变规律 …… (136)
19.3　γ衰变 …… (136)
19.4　α衰变 …… (137)
19.5　β衰变和中微子 …… (137)
第20章　核反应 …… (147)
20.1　标记 …… (147)
20.2　核反应的分类 …… (147)
20.3　实验室系和质心系 …… (148)
20.4　核反应的能量学说 …… (149)
20.5　核截面 …… (149)
20.6　核裂变 …… (149)
20.7　核聚变 …… (150)
第21章　粒子物理 …… (159)
21.1　粒子谱系 …… (159)
21.2　粒子相互作用 …… (160)
21.3　守恒律 …… (160)
21.4　轻子守恒 …… (161)
21.5　重子守恒 …… (161)
21.6　奇异性守恒 …… (161)
21.7　同位旋和宇称守恒 …… (161)
21.8　短寿命粒子和共振态 …… (162)
21.9　八重方式 …… (162)
21.10　夸克 …… (163)

第VI部分　原子系统

第22章　分子 …… (173)
22.1　分子键 …… (173)

22.2 双原子分子的激发 …… (174)
第23章 气体运动论 …… (184)
23.1 气体中的平均值 …… (184)
23.2 理想气体定律 …… (184)
第24章 分布函数 …… (190)
24.1 离散分布函数 …… (190)
24.2 连续分布函数 …… (192)
24.3 基本分布函数和态密度 …… (192)
第25章 经典统计:麦克斯韦-玻尔兹曼分布 …… (197)
第26章 量子统计:费米-狄拉克和玻色-爱因斯坦分布 …… (205)
26.1 费米-狄拉克统计 …… (205)
26.2 玻色-爱因斯坦统计 …… (205)
26.3 高温极限 …… (205)
26.4 两个有用的积分 …… (206)
26.5 黑体辐射 …… (206)
26.6 金属的自由电子理论 …… (208)
26.7 晶体的比热 …… (212)
26.8 量子力学理想气体 …… (215)
26.9 量子分布函数的推导 …… (218)
第27章 固体 …… (221)
27.1 固体的能带理论 …… (221)
27.2 超导电性 …… (228)
附 录 …… (232)
在常用单位下的某些基本常数 …… (232)
一些常用单位换算关系 …… (232)
某些粒子的质量 …… (232)
中性原子质量 …… (232)
译者后记 …… (242)

第Ⅰ部分　狭义相对论

第1章　伽利略变换

1.1　事件和坐标

我们开始考虑物理事件的概念.这个事件可以是闪电击中一棵树或者两个粒子的碰撞,它在某一时刻发生在某一空间点.观察者对一个事件指定了四个坐标:三个位置坐标 x, y, z,它表征与观察者所在处的坐标原点的距离和时间坐标 t,它是用观察者自己的钟记录的.

考虑两个观察者,O 及 O',O'相对于 O 以常速 v 沿着它们共同的 $x-x'$ 轴移动(图1-1),两个观察者各有自己的米尺及钟来确定事件的坐标.另外,两个观察者已校准了他们的钟,当它们在 $x=x'=0$ 处相遇时,各自的钟读数是 $t=t'=0$.任何一个事件有8个数字,其中四坐标(x, y, z, t)由 O 观察到,而由 O'观察到的(代表同样事件的)四坐标是(x', y', z', t').

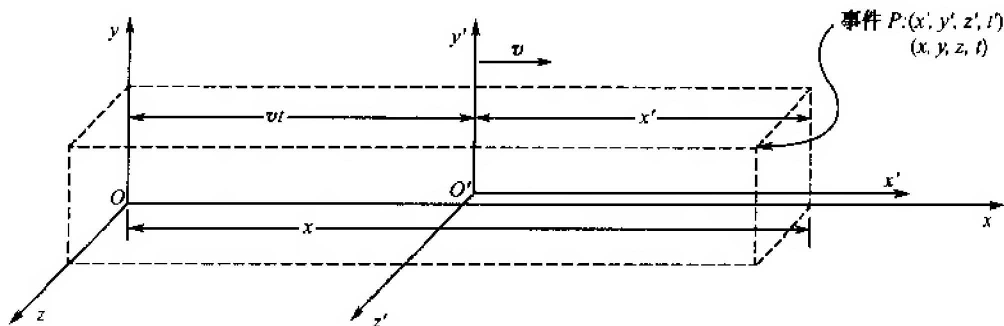


图1-1

1.2　伽利略坐标变换

对于同一事件在 O 的测量(x, y, z, t)和 O'的测量(x', y', z', t')之间有关系

$$x' = x - vt,\quad y' = y,\quad z' = z$$

另外,在经典物理中还暗含着假定

$$t' = t$$

这四个方程称为伽利略坐标变换.

1.3　伽利略速度变换

除了坐标之外,对质点的速度也有兴趣.观察者 O 及 O'都将以三个分量描述质点的速度,O 测到的速度分量是(u_x, u_y, u_z)而 O'测到的速度分量是(u'_x, u'_y, u'_z)

(u_x, u_y, u_z)和(u'_x, u'_y, u'_z)之间的关系由伽利略变换对时间微分得到.于是,从 $x'=x-vt$,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - vt) = u_x - v$$

归结在一起,伽利略速度变换是

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z$$

1.4 伽利略加速度变换

质点的加速度是它的速度的时间导数,即 $a_x = \mathrm{d}u_x/\mathrm{d}t$ 等. 为了找到伽利略加速度变换,我们微分速度变换并且利用事实 $t' = t$ 和 v = 常数,得到

$$a'_x = a_x, \qquad a'_y = a_y, \qquad a'_z = a_z$$

于是对于以常值相对速度运动的各观察者来说,所测得的加速度分量是相同的.

1.5 方程的不变性

方程的不变性是指由两个观察者所确定的方程具有同样的形式. 在经典理论中,假定两个观察者的空间和时间测量是由伽利略变换联系起来的. 于是,由一个观察者确定了方程的一个形式,将伽利略变换用到这个形式上可得到由另外观察者所确定的形式. 如果两个形式相同,这些方程在伽利略变换下不变. 看问题 1.11 和 1.12.

例 题 详 解

1.1 火车乘客以 30m/s 在 $t = t' = 0$ 时与站在站台上一人相遇. 在相遇之后 20 s,站台上的人观察到一只鸟沿着同方向的车行轨道飞行了 800 m. 由乘客确定的这只鸟的坐标?

解 ☞ 由站台上的人所确定的鸟的坐标是

$$(x, y, z, t) = (800\ \mathrm{m}, 0, 0, 20\mathrm{s})$$

由乘客测得的鸟的距离是

$$x' = x - vt = 800\ \mathrm{m} - (30\ \mathrm{m/s})(20\mathrm{s}) = 200\mathrm{m}$$

因此由乘客确定的鸟坐标是

$$(x', y', z', t') = (200\ \mathrm{m}, 0, 0, 20\mathrm{s})$$

1.2 参见题 1.1. 站台上的人在第一次测量之后 5 s,发现鸟已飞到 850 m 处. 由这些数据求出鸟的速度(设为常速),对于站台上的人和对于车中的乘客说来分别是多少?

解 ☞ 站台上的人测到的鸟在第二个位置的坐标是

$$(x_2, y_2, z_2, t_2) = (850\ \mathrm{m}, 0, 0, 25\ \mathrm{s})$$

而由站台上的人所测到的鸟的速度 u_x 是

$$u_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{850\ \mathrm{m} - 800\ \mathrm{m}}{25\ \mathrm{s} - 20\mathrm{s}} = +10\ \mathrm{m/s}$$

这里正号表示鸟沿正 x 方向飞行. 乘客找到的鸟的第二个位置 x'_2 是

$$x'_2 = x_2 - vt_2 = 850\ \mathrm{m} - (30\ \mathrm{m/s})(25\ \mathrm{s}) = 100\ \mathrm{m}$$

于是$(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) = (100\ \mathrm{m}, 0, 0, 25\ \mathrm{s})$,而由车中乘客测得的鸟的速度 u'_x 是

$$u'_x = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{100\ \mathrm{m} - 200\ \mathrm{m}}{25\ \mathrm{s} - 20\ \mathrm{s}} = -20\ \mathrm{m/s}$$

所以乘客测量到鸟沿负 x' 方向飞行. 这个结果与从伽利略速度变换所得的一致

$$u'_x = u_x - v = 10\ \mathrm{m/s} - 30\ \mathrm{m/s} = -20\ \mathrm{m/s}$$

1.3 实验室中静置着一个放射性物质样品,它放出两个方向相反的电子. 由实验室人员测得一个电子的速率为 0.6 c,另一个速率为 0.7 c. 按照经典速度变换,一个电子相对于另一个电子的速率是多少?

解 ☞ 设观察者 O 静止在实验室中,观察 O' 与以 0.6 c 运动的电子相对静止(设运动方向为正). 于是从伽利略速度变换,

$$u'_x = u_x - v = -0.7\,c - 0.6\,c = -1.3\,c$$

这个结果说明，按照伽利略变换，速度大于光速是可能的，这个结论与狭义相对论抵触.

1.4 火车以 60 mi/h(译者按：mi/h 即英里/小时)速度在 12:00 通过一车站. 20 s 以后，在铁路的延伸方向上距车站一英里处，一个闪电留下一个击痕. 由站台上的观察者及火车上的技师观察到的闪电的坐标分别是多少?

解 ☞ 两个人所观察到的坐标是

$$t' = t = (20\ \text{s})\left(\frac{1\text{h}}{3600\text{s}}\right) = \frac{1}{180}\ \text{h}$$

在车站上的观察者看到的空间坐标是 $x = 1$ mi. 火车上技师确定的空间坐标是

$$x' = x - vt = 1\ \text{mi} - 60\ \text{mi/h}\left(\frac{1}{180}\text{h}\right) = \frac{2}{3}\ \text{mi}$$

1.5 地面上射手在东北方向射出一颗子弹，击中离射手 0.25 英里远的一只鹿. 子弹以 1800 mi/h 速率穿行. 在子弹击发瞬刻，一架飞机以高 $h = 1$mi 的姿态并且以 600 mi/h 的速率向东运动. 当子弹击中鹿时，由飞机上观察者看到的坐标是什么?

解 ☞ $t' = t = \dfrac{0.25\ \text{mi}}{1800\ \text{mi/h}} = 1.39 \times 10^{-4}\text{h}$

$x' = x - vt = (0.25\ \text{mi})\cos 45° - (600\text{mi/h})\cdot(1.39 \times 10^{-4}\text{h}) = 0.094\ \text{mi}$

$y' = y = (0.25\ \text{mi})\sin 45° = 0.177\ \text{mi}$

$z' = z - h = 0 - 1\ \text{mi} = -1\ \text{mi}$

1.6 在地面上静止的观察者看到下述碰撞. 一个质量 $m_1 = 3$ kg 以速度 $u_1 = 4$ m/s 沿 x 轴正向运动的质点与一个质量 $m_2 = 1$ kg 以速度 $u_2 = -3$ m/s 沿 x 轴运动的质点相遇. 在迎头碰撞之后，地面上的人观察到 m_2 的速度为 $u_2^* = -3$ m/s，沿 x 轴运动. 求出碰撞后 m_1 的速率 $u_1^* = ?$

解 ☞ 初始动量 = 终了动量

$$(3\ \text{kg})(4\ \text{m/s}) + (1\ \text{kg})(-3\ \text{m/s}) = (3\ \text{kg})u_1^* + (1\ \text{kg})(3\ \text{m/s})$$

$$9\text{kg}\cdot\text{m/s} = (3\ \text{kg})u_1^* + 3\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

解出　$u_1^* = 2$ m/s.

1.7 第二个观察者以速度 2 m/s 沿地面 x 轴运动，看到题 1.6 所描述的碰撞. 他观察到的系统碰撞前后的动量是多少?

解 ☞ 利用伽利略速度变换.

$$u_1' = u_1 - v = 4\ \text{m/s} - 2\ \text{m/s} = 2\ \text{m/s}$$
$$u_2' = u_2 - v = -3\ \text{m/s} - 2\ \text{m/s} = -5\ \text{m/s}$$
$$u_1^{*\prime} = u_1^* - v = 2\ \text{m/s} - 2\ \text{m/s} = 0$$
$$u_2^{*\prime} = u_2^* - v = 3\ \text{m/s} - 2\ \text{m/s} = 1\ \text{m/s}$$

$$(\text{初始动量})' = m_1u_1' + m_2u_2' = (3\ \text{kg})(2\ \text{m/s}) + (1\ \text{kg})(-5\ \text{m/s}) = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$(\text{终了动量})' = m_1u_1^{*\prime} + m_2u_2^{*\prime} = (3\ \text{kg})(0) + (1\ \text{kg})(1\text{m/s}) = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

于是，作为伽利略变换的结果，在 O' 系动量仍旧守恒(但与 O 系有不同的数值).

1.8 敞篷汽车以 100 ft/s 开行，车上有一小孩向上抛出一个速度为 20 ft/s 的球. 写出由(a)小孩；(b)路边站台的观察者所看到的运动方程(给出位置与时间的关系).

解 ☞ 对于车上的小孩，该球垂直升降，所以

$$y' = v_0t' + \frac{1}{2}at'^2 = (20\ \text{ft/s})t' + \frac{1}{2}(-32\ \text{ft/s}^2)t'^2 = 20t' - 16t'^2$$

$$x' = z' = 0$$

对于站台上的观察者，从伽利略变换得到

$$t = t'$$

$$x = x' + vt = 0 + 20t, y = y' = 20t - 16t^2, z = z' = 0$$

1.9 考虑一个与弹簧连接并且在水平无摩擦表面运动的物体.证明从经典变换规律看来,无论是在表面的观察者还是以恒定速度沿弹簧方向移动的观察者,所得的物体运动方程相同.

解 ☞ 由静止在表面上的观察所确定的物体运动方程是 $F = ma$,或者

$$-k(x - x_0) = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

第二个观察者所确定的运动方程是,利用伽利略变换得到

$$x = x' + vt', \quad x_0 = x'_0 + vt', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}$$

将这些关系代入式(1)中有

$$-k(x' - x'_0) = m\frac{d^2x'}{dt'^2} \tag{2}$$

因为式(1)和式(2)具有同样形式,运动方程在伽利略变换下不变.

1.10 证明电磁波方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

在伽利略变换下不能保持不变.

证 ☞ 方程不变是指用新变数 x', y', z', t' 表示时形式不变.从伽利略变换有

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -v, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} = \cdots = 0$$

按照复合求导规则并利用上面的结果有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}$$

类似地

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}$$

并且

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -v\frac{\partial\phi}{\partial x'} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} - 2v\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'} + v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}$$

将这些结果代入波动方程中,有

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} + \frac{1}{c^2}\left(2v\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'} - v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}\right) = 0$$

于是波动方程在伽利略变换下不再不变,方程的左方因增添了一个附加项而改变了形式.

电磁波方程可从电磁理论的麦克斯韦方程导出.将这里描述的方法用到麦克斯韦方程中去,我们发现在伽利略变换下麦克斯韦方程也要改变形式.与题 6.23 相比,在那里证明电磁波方程在洛伦兹变换下不变.

补充习题

1.11 在以 30 ft/s 行进,长为 20 ft 的运货车车尾有一个人(O'),在他遇到地面上的人(O)之后两秒钟,记录下车头闪光灯的一次闪烁.对于这两个人来说,他们对于这个事件坐标的记录分别是什么.

答案:$(x', t') = (20\text{ ft}, 2\text{ s})$;$(x, t) = (80\text{ft}, 2\text{s})$

1.12 一个小孩看到一头鹿从沿他的前面跑走.鹿以 20 mi/h 的速度向前跑.小孩前去追捕,以8 mi/h速率向前跑.鹿相对于小孩的速度是多少?

答案:12 mi/h

1.13 在火车上 一个男孩在车行方向上扔出一个速率为 20 mi/h的球.如果火车以 80 mi/h 速率运转,地面上

的人测到的球的速率是多少？

答案：100 mi/h

1.14　一个旅客在火车车厢中以速率 2 mi/h 沿车行方向相反的方向散步，而火车在地面上以 60 mi/h 速率直线开行．地面上的观察者看到的这个旅客的速率是多少？

答案：58mi/h

1.15　铁路站台上一个管理人员与正在以 60 mi/h 运行的列车的前端的技术员对表．列车有 1/4 mi 长．两分钟之后火车离开站台，这时尾车上的安全员倒了一杯咖啡．由技术员及由管理人员所确定的安全员倒咖啡事件的坐标分别是多少？

答案：$(x', t') = \left(-\frac{1}{4}\text{mi}, 2\ \text{min}\right)$；$(x, t) = \left(1\frac{3}{4}\ \text{mi}, 2\text{min}\right)$

1.16　车上一位太太倒了两杯咖啡．第二杯在第一杯之后 10 分钟．火车以 20 m/s 按直线运行．地面上的人看到这两次冲倒之间相隔了多少距离？

答案：12 000 m

1.17　一个 1 kg 的球以 3 m/s 向北运动．它与一个静止的完全相同的球进行了完全弹性碰撞，而在碰撞之后，两个球在北—南轴上运动．在这个实验室系中，计算出碰撞前和碰撞后的总动量．

答案：3 kg·m/s

1.18　见题 1.17，计算碰撞前和碰撞后的总能量．

答案：4.5 J

1.19　参照题 1.17，当观察者以 1.5 m/s 朝北运动时，计算碰撞前和碰撞后动量．

答案：0

1.20　对于题 1.19 中的观察者，碰撞前和碰撞后的能量是多少．

答案：2.25 J

1.21　当观察者以 2 m/s 向东移动时，重复题 1.19 和 1.20 的讨论．

答案：2.5 kg·m/s 西偏北 37°，6.25 J

1.22　一个人在船上以 15 ft/s 向东划去．在通过码头瞬刻，码头上有一人向北扔出一块石头．这块石头 6 秒钟后落入与码头相距 150 ft 的水中．找出由船上的人确定这溅落事件的坐标．

答案：$(x, y, t) = (-90\ \text{ft}, 150\ \text{ft}, 6\ \text{s})$

1.23　考虑一维弹性碰撞，它发生在 O 系的 x 轴上．用经典变换方程证明，对于以常速 u 沿着 O 系 x 轴运动的第二个观察者 O' 来说，动能也是守恒的．

第 2 章　爱因斯坦假说

2.1　绝对空间和以太

伽利略速度变换的一个推论是:如果某个观察者测到光讯号以速度 $c=3\times10^8\mathrm{m/s}$ 传播,则其他任何相对他运动的观察者来测量同样的光讯号的传播速度与 c 有区别.能不能确定特殊的坐标系,如果观察者相对于它静止,则对于这个特殊的观察者来说测到的光讯号速度是 c 值?

在爱因斯坦之前,一般认为这个特殊的观察者就是觉得麦克斯韦方程成立的观察者.麦克斯韦方程用来描述电磁理论,并且指出电磁波将以速率 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=3\times10^8$ m/s 传播.相对于这个特殊的观察者静止的空间称为"绝对空间".相对于绝对空间运动的其他观察者将测到光速与 c 有差别.因为光是电磁波,19 世纪的物理学家觉得光所赖以传播的介质必须存在.于是认为"以太"充满了整个绝对空间.

2.2　迈克耳孙-莫雷实验

如果以太存在,在地球上的观察者在以太中运动将感觉到"以太风".一个对于测量地球通过假设的以太运动敏感的装置由迈克耳孙在 1881 年制成,而由迈克耳孙和莫雷在 1887 年改进.实验的结论是没有探测到通过以太的运动.见题 2.5,2.6 和 2.7.

2.3　长度和时间的测量——原理性问题

对于迈克耳孙-莫雷实验的零结果和麦克斯韦方程仅对于特殊观察者才成立的一个共同因素是伽利略变换.这个"明显的"变换被爱因斯坦从"操作"观点加以重新研究.爱因斯坦认为,涉及物理理论的任何量至少在原则上有一个完全确定的测量手续.如果这样的手续未能形成,那么这个量不能在物理中起作用.爱因斯坦从操作观念上指出无法判明伽利略变换 $t'=t$,即测量同一事件的时间的两个观察者所得的结果相同这一说法是正确的.因此,变换 $t'=t$,还有其他的伽利略变换被爱因斯坦放弃.

2.4　爱因斯坦假定

爱因斯坦的指导性概念,称为相对性原理,指出,所有的非加速观察者在各方面都处于同等地位,即使他们(按照恒定速度)相对运动.这个原理可总结如下:

假定 1:物理规律对于全部惯性系(无加速系)的观察者都是相同的.

牛顿运动规律与相对性原理一致,但麦克斯韦方程加上伽利略变换与它相抵触.爱因斯坦认为在动力学和电磁规律之间不存在基本的差别.从而他有

假定 2:由惯性系中的观察者测到的真空中的光速都是

$$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=3\times10^8\mathrm{m/s}$$

与源的运动无关.

例 题 详 解

2.1　设钟 B 与观察者的距离为 L,怎样将这个钟与放在观察者处的 A 钟调整一致.

解　☞ 将(不走的)钟 B 调到指示 $t_B=L/C$.当(由钟 A 记录到)$t_A=0$ 时送出一个光讯号到有一定距离的钟 B 处.B 钟在接到讯号后开动.

2.2　一个闪光灯放在离观察者 30 km 处. 当灯泡点着而观察者在 1:00 PM 时刻看到它的闪烁. 问灯泡点着的实际时间是多少?

解　☞ 光讯号传播 30 km 的时间是

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{30 \times 10^3 \mathrm{m}}{3 \times 10^8 \mathrm{m/s}} = 1 \times 10^{-4} \mathrm{s}$$

于是, 这个闪光灯泡在 1:00PM 之前 1×10^{-4}s 时刻点着.

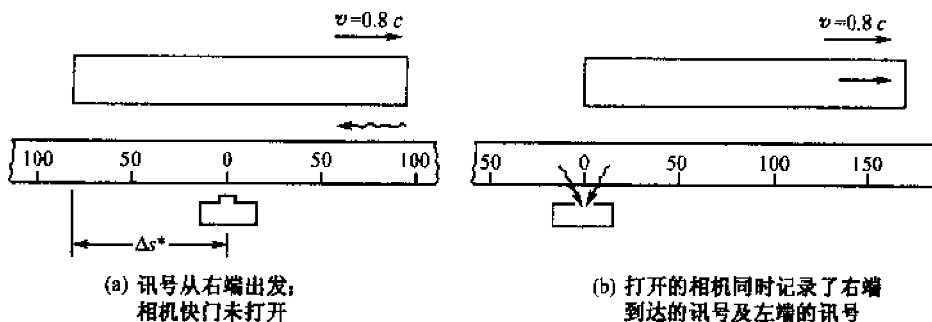
2.3　一棒由左向右运动. 当棒的左端通过相机时摄下一幅棒与静置的带刻度米尺放在一起的照片. 在所显示的图形中, 棒的左端与米尺上的零刻度重合而右端与 0.9m 刻度相重. 如果棒以 0.8 c 相对于相机移动, 确定棒的实际长度.

解　☞ 当棒右端的光讯号被相机摄上时, 它必须是提前一段时间

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{0.90 \mathrm{m}}{3 \times 10^8 \mathrm{m/s}} = 3 \times 10^{-9} \mathrm{s}$$

在这一段时间内, 棒的左端前进了一段距离 Δs^*, 它的大小是(图 2-1)

$$\Delta s^* = v\Delta t = (0.8 \times 3 \times 10^8 \mathrm{m/s})(3 \times 10^{-9} \mathrm{s}) = 0.72 \mathrm{~m}$$



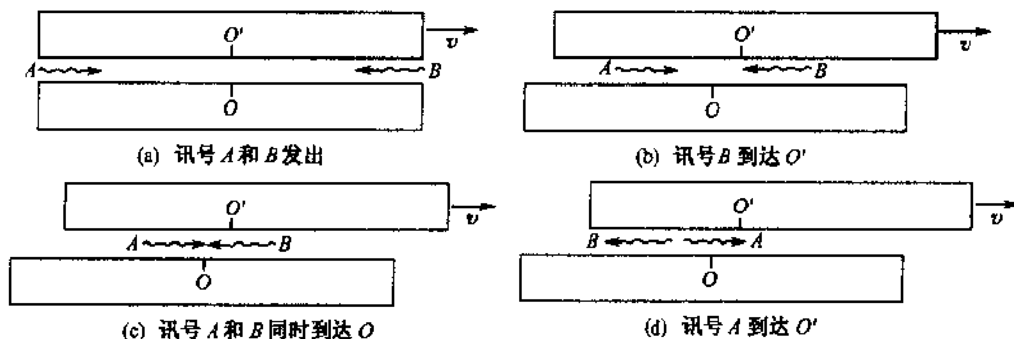
(a) 讯号从右端出发; 相机快门未打开　　(b) 打开的相机同时记录了右端到达的讯号及左端的讯号

图 2-1

于是棒的实际长度是 $L = 0.90 \mathrm{~m} + 0.72 \mathrm{~m} = 1.62 \mathrm{~m}$. 这个结果说明了照下一根移动棒并不能得到它的正确长度.

2.4　设离观察者距离相等的两个地方各发生一个事件. 设观察者采用下述声明作为等距离事件的同时性的定义:"如果每一个事件发生的光讯号同时到达我处, 这两个事件是同时发生的."证明, 按照这个定义, 如果观察者确定了两个事件是同时的, 那么相对于他运动的另一个观察者看到这两个事件一般是不同时的.

解　☞ 参见图 2-2, 如果两个光讯号从第一个观察者(O)看来是同时的, 它们必然以不同的时间到达第二个观察者(O')处. 因为这两个讯号发出时与 O' 等距离, 按照上述定义这两个事件并不同时发生, 而是事件 B 的发生要早于事件 A.



(a) 讯号 A 和 B 发出　　(b) 讯号 B 到达 O'

(c) 讯号 A 和 B 同时到达 O　　(d) 讯号 A 到达 O'

图 2-2

2.5 图 2-3 画的是迈克耳孙-莫雷干涉仪，它的一臂(l_A)与"以太风"平行.证明如果这个装置旋转 90°，移动过望远镜叉丝的条纹数 ΔN 与$(v/c)^2$ 成正比.

$$\Delta N = \frac{v^2}{\lambda c^2}(l_A + l_B)$$

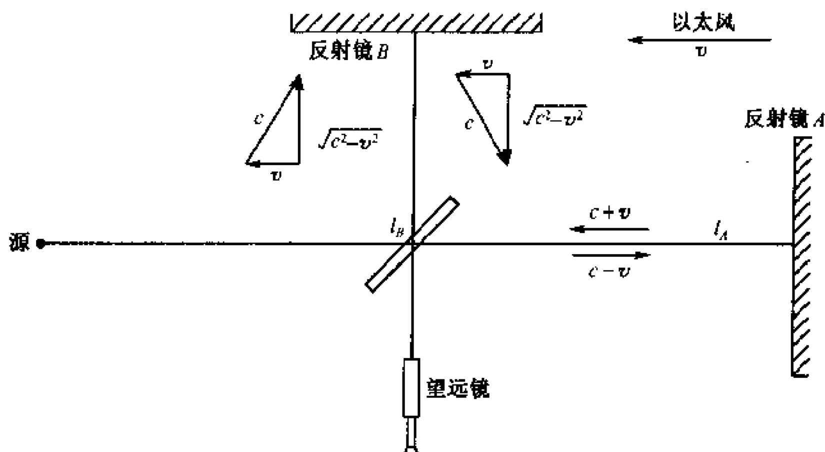


图 2-3

解 ☞ 从臂 l_A，光到达镜 A 的时间等于臂长 l_A 除以光速，按照伽利略变换光速等于 $c-v$.折回时路线长度仍旧是 l_A，但是传播速度为 $c+v$，因此来回传播的总时间是

$$t_A = \frac{l_A}{c-v} + \frac{l_A}{c+v} = \frac{2l_A/c}{1-v^2/c^2}$$

在另一个臂传播的光线必需保证最终速度(在以太中的速度加上以太相对于干涉仪的速度)矢量与臂 l_A 垂直.这个结果给出了沿路线 l_B 来回的速率都是 $\sqrt{c^2-v^2}$，所以往返所需的时间为

$$t_B = \frac{2l_B}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l_B/c}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

如果假设 $v/c \ll 1$.时间 t_A 和 t_B 可展到$(v/c)^2$ 的一阶而时间差是

$$t_A \approx \frac{2l_A}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right), \quad t_B \approx \frac{2l_B}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

而

$$\delta = t_A - t_B \approx \frac{2(l_A-l_B)}{c} + \frac{2l_A v^2}{c^3} - \frac{l_B v^2}{c^3}$$

注意如果干涉仪旋转 90°，l_A 和 l_B 交换位置，还有时间差的交换

$$\delta' \approx \frac{2(l_A-l_B)}{c} + \frac{l_A v^2}{c^3} - \frac{2l_B v^2}{c^3}$$

而在干涉图样上将有 ΔN 个条纹的移动，这里

$$\Delta N = \frac{\delta-\delta'}{T} = \frac{c(\delta'-\delta)}{\lambda} = \frac{(l_A+l_B)v^2}{c^2}$$

其中 T 和 λ 是光的周期和波长.

2.6 假定地球通过以太的速度就是轨道速度，所以 $v = 10^{-4}c$.考虑迈克耳孙-莫雷实验，这里干涉仪的每条臂长都是 10 m，其中一条臂沿着地球穿过以太的运动方向.计算沿各个臂传播的两个光波的时间差.

解 ☞ 参照题 2.5

$$\delta \approx \frac{2}{c}(l_A - l_B) + \frac{2v^2}{c^3}\left(l_A - \frac{1}{2}l_B\right) = \frac{2(10^{-4}c)^2}{(3\times10^8\mathrm{m/s})c^2}(5\mathrm{m}) = 3.33\times10^{-16}\mathrm{s}$$

2.7 原始的迈克耳孙-莫雷实验使用臂长为 11 m 的干涉仪和 5900Å 的钠光.这个实验可显示出 0.005 个的条纹移动.这对于地球通过以太的运动速率设置了多大的上限?

解 ☞ 从题 2.5,看到的通过望远镜叉丝的条纹数 ΔN,

$$\Delta N = \frac{v^2}{\lambda c^2}(l_A + l_B) = \frac{2lv^2}{\lambda c^2}$$

$$0.005 = \frac{2(11\text{m})v^2}{(5900\times10^{-10}\text{m})(3\times10^8\text{m/s})}$$

解出 $v = 3.47\times10^3\text{m/s}$.

地球轨道速度是 $3\times10^4\text{m/s}$,所以干涉仪可以足够敏感地测定这个运动,但没有看到条纹移动.

补充习题

2.8 重复题 2.3,但照片是棒的右端通过相机时摄下的.

答案: 0.18 m

2.9 当一根移动的米尺中点通过相机时,相机快门打开并且照得一帧米尺及一根静止的带刻度尺在一起的照片.如果相对于照相机的速率是 0.8 c,记录到照片上的米尺长度是多少?

答案: 3.24 m

2.10 参照题 2.4.如果两个讯号同时到达 O',由 O 确定的时间顺序是什么?

答案: A 在 B 之前

2.11 设地球的轨道速率 $3\times10^4\text{m/s}$ 是地球穿过以太的速率.如果光走过等臂迈克耳孙-莫雷装置在平行于运动方向上需要 t 秒,问传过垂直运动方向上的需要多少秒?

答案: $(1-0.5\times10^{-8})t_A$

第 3 章 洛伦兹坐标变换

2.4 节假定 2 要求伽利略坐标变换代之以洛伦兹坐标变换.对于图 1-1 的两个观察者有

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \tag{3.1}$$

这些方程可以倒过来而给出

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, y = y', z = z' \tag{3.2}$$

在式(3.1)和(3.2)中,v 是 O' 相对于 O 沿着共同轴的速度:如 O' 沿正 x 方向移动,v 是正值;而沿负 x 方向移动则是负值.还假定原点相重时开动时钟,于是 $x' = x = 0$ 时 $t' = t = 0$.注意逆变换可从第一组变换中将带撇变数和不带撇变数互换,然令 $v \to -v$ 而得.这个符合假定 1 的要求,因为两个观察者是完全等价的,而观察者 O 以速度 $-v$ 相对于 O' 运动.

3.1 光速的不变性

设 O 和 O' 相遇时(在 $t = t' = 0$),一个光讯号从它们的共同原点在正 $x \sim x'$ 方向发出.如果 O 得到讯号的空间和时间坐标满足关系 $x = ct$,那么,按照式(3.1),在 O' 中有

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{ct - vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{ct[1-(v/c)]}{\sqrt{[1-(v/c)][1+(v/c)]}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}}ct$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{t - \frac{v}{c^2}ct}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{t[1-(v/c)]}{\sqrt{[1-(v/c)][1+(v/c)]}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}}t$$

在 O' 中有 $x' = ct'$ 与爱因斯坦的第二个假定一致.还注意对于这个光讯号事件,$t' \neq t$,与伽利略假设肯定不一样.

3.2 在求解包含洛伦兹变换在内的问题的一般考虑

在接触到任何空-时问题时,记住关键的概念是"事件".最大量的问题是两个观察者测量事件(或事件集)的空间和时间坐标.于是每个事件有与它相联系的 8 个数:由 O 指定的(x, y, z, t)和由 O' 指定的(x', y', z', t').洛伦兹变换表达了这些参数之间的变换关系.

很多时候,要考虑在两个事件之间的空间区间和/或时间区间的确定.这时,一个有用的技巧是将描述每个事件的合适的洛伦兹变换彼此相减.例如,设观察者 O' 测得在事件 A 和 B 之间的时间和空间区间,并且也需要得到由 O 测得的同样的两个事件之间的时间区间.由式(3.2),从 t_B 减去 t_A

$$t_B - t_A = \frac{(t'_B - t'_A) + (v/c^2)(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \tag{3.3}$$

因为方程右方的量全是已知的,$t_B - t_A$ 可以确定.

3.3 同时性

如果观察者测到两个事件在同样的时间发生，则称这两个事件是同时的.在经典物理中，当一个观察者看到两个事件是同时的，于是，因为伽利略变换，任何其他的观察者也看到这两个事件是同时的.但在相对论物理中，两个事件对一个观察者是同时的，对另一个观察者一般说不是同时的.

例如，假设由 O' 看到事件 A 和 B 是同时的，于是 $t'_A = t'_B$.按照式(3.3)，同样是这两个事件，由 O 测到的时间差是

$$t_B - t_A = \frac{(v/c)^2(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

如果两个事件发生在同一个空间位置，$x'_B = x'_A$ 则这两个事件对 O 来说也是同时的.但是如果 $x'_B \neq x'_A$，则由 O 确定的两个事件不是同时的.

注意如果两个事件发生在同一空间位置，并且事件是同时的，对于每一个观察者来说都只需要一个时钟.另外，如果两个事件在空间是隔开的，于是每一个观察者需要两个精确地同步的时钟，以确定这两个事件是否同时.

例 题 详 解

3.1 当(a) $v = 10^{-2}c$；(b) $v = 0.9998c$ 求出 $\sqrt{1-(v/c)^2}$.

解 ☞ 下面利用二项式展开

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots$$

(a)设在二项式展开中，$x = -10^{-4}$，$n = \frac{1}{2}$，因为 x 很小，在展开式中只取头两项，有 $(1-10^{-4})^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(-10^{-4}) = 1 - 0.00005 = 0.99995$

(b) $\sqrt{1-(v/c)^2} = \sqrt{1-(0.9998)^2} = \sqrt{1-(1-0.0002)^2}$ 为了求出 $(1-0.0002)^2$，我们利用二项展开，得到

$$(1-0.0002)^2 \approx 1 - 2(0.0002) = 1 - 0.0004$$

利用上述表达式我们得到

$$\sqrt{1-(v^2/c^2)} \approx \sqrt{1-(1-0.0004)} = 0.02$$

3.2 由 O 测到一个闪光灯泡在 $x = 100$ km，$y = 10$ km，$z = 1$ km 处在 $t = 5\times10^{-4}$s 时爆炸.当由相对于 O 以 $-0.8c$ 沿共同的 $x - x'$ 轴运动的第二个观察者测定时，其坐标 x'，y'，z' 和 t' 是什么？

解 ☞ 从洛伦兹变换，

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{100\text{ km} - (-0.8\times3\times10^5\text{km})(5\times10^{-4}\text{s})}{\sqrt{1-(0.8)^2}}$$

$$= 367\text{ km}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{5\times10^{-4}\text{s} - \frac{(-0.8)(100\text{ km})}{3\times10^5\text{km/s}}}{\sqrt{1-(0.8)^2}}$$

$$= 12.8\times10^{-4}\text{s}$$

$$y' = y = 10\text{ km}$$

$$z' = z = 1\text{ km}$$

3.3 设有一个质点相对于 O' 运动，常速 $c/2$，在 $x'y'$ 一平面内，其轨道与 x' 轴成 $60°$.如果 O' 相对于 O 的速度是 $0.6c$，沿 $x - x'$ 轴，求出由 O 确定的质点的运动方程.

解 ☞ 由 O'确定的运动方程是

$$x' = u'_x t' = \frac{c}{2}(\cos 60^\circ)t', y' = u'_y t' = \frac{c}{2}(\sin 60^\circ)t'$$

将式(3.1)代进第一个表达式中,我们有

$$\frac{x - vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{c}{2}(\cos 60^\circ)\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$x - (0.6c)t = \frac{c}{2}(\cos 60^\circ)\left(t - \frac{0.6}{c}x\right)$$

$$x = (0.74c)t$$

代进第二个表达式中有

$$y' = y = \frac{c}{2}(\sin 60^\circ)\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{c}{2}(\sin 60^\circ)\frac{t-(0.6)(0.74t)}{\sqrt{1-(0.6)^2}}$$

$$= (0.30c)t$$

3.4 $\frac{1}{2}$英里长的火车(由车上观察者测定的)以 100 mi/h 速率行驶.从地面上的观察者看到两个闪电同时击中火车两端.由车上的观察者测定的时间差是多少?

解 ☞ 我们有

$$(100\ \text{mi/h})\left(\frac{1\text{h}}{3600\ \text{s}}\right) = 2.78\times10^{-2}\text{mi/s}$$

设闪电击中的事件为 A 和 B.在地面上的观察者 O 看来,从式(3.3)有

$$t_B - t_A = \frac{t'_B - t'_A + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$0 = \frac{(t'_B - t'_A) + \frac{2.78\times10^{-2}\text{mi/s}}{(1.86\times10^5\text{mi/s})^2}(0.5\ \text{mi})}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

解出 $t'_B - t'_A = -4.02\times10^{-13}$s,这里负号表示事件 A 在事件 B 之后发生.

3.5 观察者 O 看到两个事件在空间和时间上分别相差 600 m 和 8×10^{-7}s.观察者 O'相对于 O 必须跑得多快才能使得这两个事件对 O 来说是同时的.

解 ☞ 将两个洛伦兹变换相减,我们有

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$0 = \frac{8\times10^{-7}\text{s} - \frac{v}{c}\left(\frac{600\text{m}}{3\times10^8\text{m/s}}\right)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

解出 $v/c = 0.4$.

3.6 由 O 测到的两个事件的空-时坐标是 $x_1 = 6\times10^4$m, $y_1 = z_1 = 0$ m, $t_1 = 2\times10^{-4}$s 和 $x_2 = 12\times10^4$m, $y_2 = z_2 = 0$ m, $t_2 = 1\times10^{-4}$s.如果 O'观察到这两个事件是同时的,O'相对于 O 的速度是多少?

解 ☞ 两个洛伦兹变换相减

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$0 = \frac{(1\times10^{-4}\text{s} - 2\times10^{-4}\text{s}) - \frac{v}{c}\left(\frac{12\times10^4\text{m} - 6\times10^4\text{m}}{3\times10^8\text{m/s}}\right)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

解出 $v/c = -1/2$,于是 v 沿负 x 方向.

3.7　参照题3.6，由O'测定的两个事件的空间间隔是多少？

解　两个洛伦兹变换相减：

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

从题3.6，$v/c = -\frac{1}{2}$或$v = -1.5\times10^8 \mathrm{m/s}$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(12\times10^4\mathrm{m} - 6\times10^4\mathrm{m}) - (-1.5\times10^8\mathrm{m})(1\times10^{-4}\mathrm{s} - 2\times10^{-4}\mathrm{s})}{\sqrt{1-(-0.5)^2}}$$

$$= 5.20\times10^4\mathrm{m}$$

补 充 习 题

3.8　从式(3.1)导出式(3.2)．

3.9　由O'确定，一个闪电在$t' = 8\times10^{-8}$s时击中$x' = 60$ m，$y' = z' = 0$处．O'在O的x轴上有速度0.6 c，由O确定的这一次电击的空-时坐标是多少？

答案：$(x, y, z, t) = (93\ \mathrm{m}, 0, 0, 2\times10^{-7}\mathrm{s})$

3.10　观察者O'相对于O的速率是0.8c，时钟已校准到在$x = x' = 0$时$t = t' = 0$．如果O确定了闪光灯泡在$x = 50$ m和$t = 2\times10^{-7}$s时爆炸，由O'测定的事件的时间是多少？

答案：1.11×10^{-7}s

3.11　参照题3.10，如果由O'确定了第二个闪光灯泡在$x' = 10$ m和$t' = 2\times10^{-7}$s闪烁，由O测定的这两个事件之间时间差是多少？

答案：1.78×10^{-7}s

3.12　参照题3.11，由(a)O'，(b)O测量的两个事件的空间间隔是多少？

答案：(a)6.67 m；(b)46.7 m

第 4 章　相对论长度收缩

4.1　长度定义

如果物体与观察者相对静止，其长度由测物体末端的空间坐标差而确定. 因为物体不运动，这些测量可以在任何时间去做，这样确定的长度称为是物体的静止长度或本质长度.

但对于一个运动物体，这个手续比较复杂，原因是物体边界的空间坐标必须同时测量. 这些坐标之差定义为是物体的长度.

现在考虑一根尺子，沿着 $x-x'$ 方向放置，相对于观察者 O' 静止. 我们来确定由 O 及 O' 测定的长度相互之间有什么关系，O' 相对于 O 以速度 v 在 $x-x'$ 方向上运动. 尺子的末端以 A 和 B 记之. 从洛伦兹变换(3.1)得到

$$x'_B - x'_A = \frac{(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

差值 $x'_B - x'_A = L_0$ 是由 O' 测得的尺子的(本质)长度. 如 x_B 和 x_A 是由 O 在相同的时刻测得的，则 $t_B - t_A = 0$，而差值 $x_B - x_A = L$ 是由 O 测得的尺子的长度. 于是，我们有

$$L = L_0\sqrt{1-(v^2/c^2)} \tag{4.1}$$

因为 $\sqrt{1-(v^2/c^2)} < 1$，我们有 $L < L_0$，所以由 O 测定的移动尺子的长度收缩. 这个结果称为洛伦兹-斐兹杰惹收缩.

警示!

"空间坐标间隔"和"长度"概念之间的区别本质上是清楚的. 在解题中一个普通的错误是将一个给定的空间区间乘一个或除一个因子 $\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. 如果我们考虑的是寻找长度之间的关系，"长度"的概念精确的定义如前，这样的处理可以接受. 但如果我们对并非同时发生的两个事件之间的空间区间有兴趣，于是这个答案是从 3.3 节的相减技巧得到，正确答案不能从在原始空间间隔乘或除 $\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ 得到.

例题详解

4.1　如何使得一个火箭船缩短到它的静止长度的 99%.

解　☞ 从长度收缩公式(4.1)，

$$\frac{L}{L_0} = 0.99 = \sqrt{1-(v^2/c^2)} \text{ 或 } v = 0.141c$$

4.2　一个相对于太阳是静止的观察者 O' 来测量，求出地球直径的洛伦兹收缩.

解　☞ 取地球的轨道速度 3×10^4m/s 和地球的直径 7920 mi，由洛伦兹收缩表达式有

$$D = D_0\sqrt{1-(v^2/c^2)} = (7.92\times10^3\text{mi})\sqrt{1-\left(\frac{3\times10^4\text{m/s}}{3\times10^8\text{m/s}}\right)^2}$$

$$\approx (7.92\times10^3\text{mi})(1-0.5\times10^{-8})$$

解出 $D_0 - D = 3.96\times10^{-5}\text{mi} = 2.51\text{in}$. 可以看到在通常考虑的速率下，相对论效应是非常小的.

4.3　一根米尺对 O' 的 x' 轴的夹角是 30°，如果米尺对 O 的 x 轴的夹角为 45°，v 值是多少?

解　☞ 我们有

$$L'_y = L'\sin\theta' = (1\text{ m})\sin30° = 0.5\text{ m}$$

$$L'_x = L'\cos\theta' = (1\text{ m})\cos30° = 0.866\text{ m}$$

因为仅在 $x-x'$ 方向有长度收缩，

$$L_y = L'_y = 0.5\ \mathrm{m},\quad L_x = L'_x\sqrt{1-(v^2/c^2)} = (0.866\ \mathrm{m})\sqrt{1-(v^2/c^2)}$$

因为 $\tan\theta = L_y/L_x$，

$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{0.5\ \mathrm{m}}{(0.866\ \mathrm{m})\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

解出 $v=0.816\,c$.

4.4 参照题 4.3，由 O 测量时米尺的长度是多少？

解 ☞ 利用毕达哥拉斯定理*或更加简单些，

$$L = \frac{L_y}{\sin 45^\circ} = \frac{0.5\ \mathrm{m}}{\sin 45^\circ} = 0.707\ \mathrm{m}$$

4.5 一个立方体具有(本质)体积 $1000\ \mathrm{cm}^3$. 求出由一个相对于该立方体以 $0.8\,c$ 的速度沿着平行于它的一条棱的方向的观察者 O' 所确定的体积.

解 ☞ 观察者看到平行于运动方向的一边有收缩长度

$$l'_x = l_x\sqrt{1-(v^2/c^2)} = (10\ \mathrm{cm})\sqrt{1-(0.8)^2} = 6\ \mathrm{cm}$$

其他边的长度没有改变

$$l'_y = l_y = l'_z = l_z = 10\ \mathrm{cm}$$

于是

$$V' = l'_x l'_y l'_z = (6\ \mathrm{cm})(10\ \mathrm{cm})(10\ \mathrm{cm}) = 600\ \mathrm{cm}^3$$

补充习题

4.6 飞机相对于地球以 600 m/s 速率飞行. 它的本质长度是 50 m. 从地球上观察者看来它缩短了多少？

答案：10^{-10}m

4.7 一列 $\frac{1}{2}$ mi 长的火车以 100 mi/h 行驶，计算它的长度收缩.

答案：5.58×10^{-15}mi $=3.52\times10^{-10}$in

4.8 观察者必须以多大速率通过地球，才能看到地球像个椭球，其长轴是短轴的 6 倍？

答案：$0.986c$

4.9 一个观察者 O' 持有 1.00 m 长手杖，它与正 x' 轴夹角为 30°. O' 相对于观察者 O 以速度 $0.8c$ 沿正的 $x-x'$ 方向运动. 由 O 测到的手杖的长度和夹角是多少？

答案：0.721 m，43.9°

4.10 面积为 $100\ \mathrm{cm}^2$ 的正方形在 O 参照系中静止. 观察者 O' 相对于 O 以 $0.8\,c$ 运动并且平行于正方形的一边. O' 测到的面积是多少？

答案：$60\ \mathrm{cm}^2$

4.11 对于题 4.10 的正方形，如果 O' 以速度 $0.8\,c$ 相对于 O 运动，沿着正方形的对角线方向，求出 O' 所测出的面积.

答案：$60\ \mathrm{cm}^2$

4.12 重复题 4.5，如果 O' 以同样的速率平行于立方体一面上的对角线运动.

答案：$600\ \mathrm{cm}^3$

---

* 中国称为勾股弦定理——译者注.

第5章　相对论时间延长

5.1　原时

如果观察者,例如 O,确定了事件 A 和 B 发生在同一位置,在这两个事件之间的时间区间可以由 O 用单个时钟确定.由 O 用他的单个时钟测定的时间区间 $t_B - t_A = \Delta t$.称为事件之间的原时区间.

5.2　时间延长

现在同样的两个事件由相对于 O 以速度 v 运动的第二个观察者 O'来研究.这第二个观察者必然确定出这两个事件发生在不同位置,因而不得不用两个不同的,但严格同步的时钟去确定 A 和 B 之间的时间间隔 $t'_B - t'_A$.为了确定由 O 及 O'测定的时间间隔之间的关系,我们将二个洛伦兹变换相减,得到

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0 - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

因为 O 测定的两个事件发生在同一个位置, $x_B - x_A = 0$.于是

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

因为 $\sqrt{1-(v^2/c^2)}<1, \Delta t' > \Delta t_0$,所以由 O'测定的两个事件之间的时间区间延长(放大).

在上述的例子中,其中的单个时钟是与 O 相对静止的.如果单个时钟与 O'相对静止,也会取得同样的结果.于是,一般说来,单个时钟走过了时间区间 Δt_0.如果这个时钟以速度 v 相对于一个观察者运动,他得到他的两个时钟走动一个时间区间 Δt,有

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

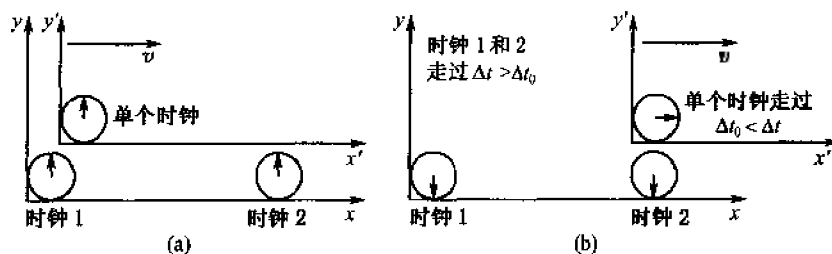


图 5-1　由观察者 O 看到的时间延长

时间延长是非常实际的效应.设想在图 5-1 中,照相机设置在时钟 2 的位置和单个钟的位置,并且当单个钟通过钟 2 时,每一个相机都摄得一帧照片.当照片冲洗出之后,每幅照片都显示了同样的事实——单个钟走过 Δt_0.而钟 2 走过 $\Delta t > \Delta t_0$, Δt 和 Δt_0 以时间延迟表达式相联系.

警示!

重要的是清楚地区分两个事件的时间间隔和"原时区间".如果观察者 O 和 O'测量了两个事件之间的时间间隔,但对于两个观察者来说都发生在不同的空间位置,则这些时间间隔就不是简单地以乘或除一个 $\sqrt{1-(v^2/c^2)}$相联系.

例题详解

5.1 如果 μ 子的平均寿命在速率为 0.95 c 时是 6×10^{-6}s. 计算在 μ 子是静止的系统中它们的平均寿命.

解 ☞ 在 μ 子静止的系统中测得的时间是原时.

$$\Delta t_0 = \Delta t\ \sqrt{1-(v^2/c^2)} = (6\times10^{-6}\text{s})\ \sqrt{1-(0.95)^2}$$
$$=1.87\times10^{-6}\text{s}$$

5.2 飞机以 600 m/s 速率相对于地球运动. 用地球上时钟测量, 问经过多长时间才看出飞机上时钟慢了 2μs?

解 ☞ 从时间延长表达式,

$$\Delta t_{地球} = \frac{\Delta t_{飞机}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_{飞机}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{6\times10^2\text{m/s}}{3\times10^8\text{m/s}}\right)^2}}$$
$$\approx\frac{\Delta t_{飞机}}{1-2\times10^{-12}}$$
$$(2\times10^{-12})\Delta t_{地球}\approx\Delta t_{地球}-\Delta t_{飞机}=2\times10^{-6}\text{s}$$
$$\Delta t_{地球}\approx10^6\text{s}=11.6\ 天$$

这个结果指出在通常速率下相对论效应的微小性.

5.3 观察者 O 和 O' 以 0.6 c 的相对速率互相靠近. 如果 O 测定到 O' 的初始距离是 20 m, 由 O 看来, 由初始测定到两个观察者相遇共用去了多少时间?

解 ☞ 我们有

$$\Delta t=\frac{距离}{速度}=\frac{20\text{ m}}{0.6\times3\times10^8\text{m/s}}=11.1\times10^{-8}\text{s}$$

5.4 在问题 5.3 中, 由 O' 测定当两个观察者相遇时共经过了多少时间?

解 ☞ 所考虑的两个事件是:(A)从 O' 的地位上来考虑对 O 作初始测量的时刻,(B)O 和 O' 相重的时刻. 这两个事件都在原点 O' 发生. 于是在 O' 测定的时间差是两个时间的原时. 从时间延长表达式

$$\Delta t_0=\Delta t\ \sqrt{1-(v^2/c^2)}=(11.1\times10^{-8}\text{s})\ \sqrt{1-(0.6)^2}$$
$$=8.89\times10^{-8}\text{s}$$

此问题的另一个解法是注意到由 O' 确定的初始距离是与 O 测定的距离以洛伦兹收缩相连的:

$$L'=L_0\ \sqrt{1-(v^2/c^2)}=(20\text{ m})\ \sqrt{1-(0.6)^2}=16\text{ m}$$

于是

$$\Delta t'=\frac{L'}{v}=\frac{16\text{m}}{0.6\times3\times10^8\text{m/s}}=8.89\times10^{-8}\text{s}$$

5.5 π 介子有半衰期 1.8×10^{-8}s. π 介子束以 0.8 c 速率离开加速器. 从经典观念看来, 当有一半 π 介子衰变时的预期距离是多少?

解 ☞ 我们有

$$距离=v\Delta t=(0.8\times3\times10^8\text{m/s})(1.8\times10^{-8}\text{s})$$
$$=4.32\text{m}$$

5.6 从相对论的观点确定题 5.5 的解答.

解 ☞ 1.8×10^{-8}的半衰期是由对 π 介子束静止的观察者得到的. 从实验室观察者看来半衰期由于时间延长而增大, 是

$$\Delta t=\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=\frac{1.8\times10^{-8}\text{s}}{\sqrt{1-(0.8)^2}}=3\times10^{-8}\text{s}$$

于是传播距离是

$$d = v\Delta t = (0.8\times 3\times 10^8\,\mathrm{m/s})(3\times 10^{-8}\,\mathrm{s}) = 7.20\ \mathrm{m}$$

对于相对 π 介子束静止的观察者,π 介子所穿过的距离 d_p 由于洛伦兹收缩

$$d_p = d_l\sqrt{1-(v^2/c^2)} = d_l\sqrt{1-(0.8)^2} = 0.6d_l$$

而小于实验室长度 d_l.走过这段距离所需要的时间是

$$\Delta t_0 = \frac{d_p}{v} \quad 或者 \quad 1.8\times 10^{-8}\,\mathrm{s} = \frac{0.6d_l}{0.8\times 3\times 10^8\,\mathrm{m/s}}$$

解出 $d_l = 7.20$ m,它与时间延长所得的结果相符.

补充习题

5.7 一个原子在 2×10^{-6}s 内蜕变.当原子以 0.8 c 速率运动时,实验室观察者测得的蜕变时间是多少?

答案:3.33×10^{-6}s

5.8 火箭船应当飞得多快才能使火箭船中观察者变老的速率是地面上的观察者的一半?

答案:$0.866c$

5.9 一个还有 60 年可活的人想去 160 000 光年距离的遥远的银河系,他的飞行速率是多少?

答案:$v/c = 1-(0.703\times 10^{-7})$

5.10 一个以 0.8 c 运动的粒子在实验室里穿行了 3 m 之后衰变,由实验室的观察者看来它存在了多长时间?

答案:1.25×10^{-8}s

5.11 一个与题 5.10 中的粒子一起运动的观察者测出的粒子在衰变之前的存活时间是多少?

答案:0.75×10^{-8}s

第 6 章　相对论时-空测量

在前几章我们或多或少地各自讨论了相对论空间测量和相对论时间测量. 但是许多类型的问题中, 空间和时间的问题是交叉的并且不能隔开处理.

例题详解

6.1 一根米尺相对于你以 0.6 c 速度沿其长度方向运动. 当米尺通过你时有多长?

解 ☞ 由你测量的米尺长度从洛伦兹收缩得到

$$L = L_0\sqrt{1-(v^2/c^2)} = (1\text{ m})\sqrt{1-(0.6)^2} = 0.8\text{ m}$$

米尺通过你的时间可用下述公式求得:

$$\text{距离} = \text{速度} \times \text{时间}$$

$$0.8\text{ m} = (0.6 \times 3 \times 10^8/\text{s}) \times \Delta t$$

$$\Delta t = 4.44 \times 10^{-9}\text{s}$$

6.2 银河中最遥远部分的光需要 10^5年到达我们的地方. 人类能不能以恒速用 50 年的时间到达那里?

解 ☞ 相对于地球静止的观察者看到, 光传送 10^5 年的距离是

$$d_0 = c(\Delta t) = 10^5 c$$

这里 c 的单位可以用例如 mi/a. 如果这个观察者以恒速 v 相对地球运动. 它走过的距离 d 缩短, 按照洛伦兹缩短

$$d = d_0\sqrt{1-(v^2/c^2)} = (10^5 c)\sqrt{1-(v^2/c^2)}$$

走过这段距离可用的时间是 50 年, 所以

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{10^5 c\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{50}$$

解出

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-2.5\times 10^{-7}} = 0.999999875$$

于是以这个速率旅行的人类将发现完成这次旅行时他过了 50 年.

6.3 平均寿命为 2×10^{-6}s 的 μ 子在海拔 6000 m 的高层大气中产生. 产生出的 μ 子有 0.998 c 的速度, 方向指向地球. 由地球上的观察者看来, 在其衰变前穿过地球的平均距离是多少? 从经典观念看来, 此距离是

$$d = v\Delta t = (0.998 \times 3 \times 10^8\text{m/s})(2 \times 10^{-6}\text{s}) = 599\text{m}$$

所以 μ 子按平均值不能到达地面.

解 ☞ 地面上的观察者确定, 因为时间延迟寿命增加:

$$\Delta t_{\text{地}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2\times 10^{-6}\text{s}}{\sqrt{1-(0.998)^2}} = 31.6\times 10^{-6}\text{s}$$

由地球上的观察者所确定的平均穿行距离是

$$d = v\Delta t_{\text{地}} = (0.998 \times 3 \times 10^8\text{m/s})(31.6 \times 10^{-6}\text{s}) = 9470\text{m}$$

于是地球上的观察者认为, 按照平均距离 μ 子会到达地球.

6.4 考虑一个相对于题 6.3 中的 μ 子静止的观察者. 在 μ 子衰变前他测到地球走近了多少? 将这个距离与 μ 子产生点与地球的距离相比较.

解 ☞ 相对于 μ 子静止的观察者确定, 地球的穿行距离是

$$d = v\Delta t_0 = (0.998 \times 3 \times 10^8 \text{m/s})(2 \times 10^{-6} \text{s}) = 599 \text{ m}$$

到地球的初始距离因为洛伦兹收缩的关系被缩短

$$L = L_0 \sqrt{1-(v^2/c^2)} = (6 \times 10^3 \text{m}) \sqrt{1-(0.998)^2} = 379 \text{ m}$$

于是在 μ 子上的观察者确定,从平均值看它将到达地球,与题 6.3 的结果一致.

6.5 火箭船中宇航员以 0.6 c 速度驶过地球并且对准了他的表使其与地球上的 12:00P.M. 相一致.宇航员的表在 12:30P.M.时火箭船通过一与地球相对静止的空间站.当火箭通过空间站时站上的时间是多少?

解 ☞ 从时间推迟表达式,

$$\Delta t_{\text{stn}} = \frac{\Delta t_{\text{rkt}}}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{30\text{min}}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = 37.5 \text{ min}$$

于是,空间站的时间是 12:37.5P.M.

6.6 在题 6.5 中,(a)由宇航员(b)由地球上观察者确定的地球到空间站距离是多少?

解 ☞ (a)距离 = 速度 × 时间 = $(0.6\times3\times10^8\text{m/s})(30 \text{ min}\times60\text{s/min}) = 3.24\times10^{11}\text{m}$

(b)距离 = 速度 × 时间 = $(0.6\times3\times10^8\text{m/s})(37.5\text{min}\times60\text{s/min}) = 4.05\times10^{11}\text{m}$

6.7 参照题 6.5 及 6.6.当火箭船通过空间站,宇航员发一无线电讯号给地球.地球上何时收到这个讯号? (a)从地球时间看;(b)从火箭时间看.

解 ☞ (a)由地球上观察者,

$$\text{时间} = \frac{\text{距离}}{\text{速度}} = \frac{4.05\times10^{11}\text{m}}{3\times10^8\text{m/s}} \times \frac{1\text{min}}{60 \text{ s}} = 22.5\text{min}$$

于是,对于地球上观察者,讯号到达时刻是

12 : 37.5P.M. + 22.5min = 1 : 00P.M.

(b)对于宇航员,

$$\text{时间} = \frac{\text{距离}}{\text{速度}} = \frac{3.24\times10^{11}\text{m}}{3\times10^8\text{m/s}} \times \frac{1\text{min}}{60 \text{ s}} = 18 \text{ min}$$

于是,对于宇航员而言,讯号到达地球的时间是

12 : 30P.M. + 18min = 12 : 48P.M.

6.8 设观察者 O 确定了两个事件,它们相距 3.6×10^8m 而时间相差 2 s.这两个事件之间的原时是多少?

解 ☞ 设第二个观察者 O'相对于第一个观察者运动,他看到这两个事件发生在同一个空间位置.两个事件之间的原时区间就是由这个观察者测定的时间区间.记这两个事件为 A 和 B,将两个洛伦兹变换相减得到

$$x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$0 = \frac{3.6\times10^8\text{m} - v(2\text{s})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$v = 1.8\times10^8\text{m/s} = 0.6c$$

将另外两个洛伦兹变换相减,我们得到原时区间是

$$t'_B - t'_A = \frac{t_B - t_A - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2\text{s} - \frac{0.6\times3.6\times10^8\text{m}}{3\times10^8\text{m/s}}}{\sqrt{1-(0.6)^2}}$$

$$= 1.6 \text{ s}$$

求解这个问题的另一种方式是利用 v 和时间延长表达式

$$\Delta t_0 = (\Delta t)\sqrt{1-(v^2/c^2)} = (2\text{s})\sqrt{1-(0.6)^2} = 1.6\text{s}$$

6.9 从观察者 O 看来,两个事件是同时的并且相距 600 km 远.如果 O'看到它们的空间间隔是 1200 km,这时两个事件的时间差是多少?

解 ☞ 将这两个事件记为 A 及 B.将两个洛伦兹变换相减得到

$$x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$12 \times 10^5\text{m} = \frac{6 \times 10^5\text{m} - v(0)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$\frac{v}{c} = 0.866$$

将另外的两个洛伦兹变换相减：

$$t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{0 - \frac{0.866(6 \times 10^5 m)}{3 \times 10^8 \text{m/s}}}{\sqrt{1-(0.866)^2}}$$

$$= -3.46 \times 10^{-3}\text{s}$$

这里的负号表示由 O'确定的事件 A 发生在事件 B 之后.

题6.10—6.12是狭义相对论中著名的孪生子效应的例证.

6.10 观察者 O'以 $0.8c$ 速率相对于某空间站运动，他要飞行到人马座 α 星去，此星有4光年的距离是与这个空间站距离最近的星.当他到达这个星后，他立刻折转并且以同样的速率返回到空间站.当 O'回到空间站，将他的年龄与一直留在空间站的他的孪生姐妹 O 相比较.

解 ☞ 从 O 看来，从空间站到人马座 α 航行所花的时间为

$$\Delta t = \frac{\text{距离}}{\text{速度}} = \frac{4\text{a} \times (1\text{光年}/\text{a})}{0.8 \times (1\text{光年}/\text{a})} = 5\text{a}$$

因为返程仍有同样的速率，由平台上观察者 O 所测定的总的时间消耗是

$$\Delta t_{\text{全程}} = 10\ \text{a}$$

O'测量的是从离开空间站到达星之间的原时区间.从而，由时间延长表达式，

$$\Delta t_0 = (\Delta t)\sqrt{1-(v^2/c^2)} = 5(\text{a})\sqrt{1-(0.8)^2} = 3\ \text{a}$$

而由 O'测定的总的时间消耗是

$$\Delta t_{\text{旅行}} = 6\ \text{a}$$

于是当他们重逢时，O'比 O 年轻4年.这个结果表明了著名的狭义相对论中的孪生子效应.注意孪生子的运动是确定的，不可以互换状态.为了返回出发地，航行的孪生子必然要折转.这个折转是实在的（O'感到了一定的加速度），可比较由 O'看到的 O 的明显的折转（在她的全部历史中没有感到加速度）.于是，O'的运动等价于两个不同的惯性系观察者，一个以 $v = +0.8\ c$ 运动而另一个以 $v = -0.8\ c$ 运动.而孪生者 O 等价于单个的惯性系观察者.

6.11 参照题6.10，假定在由 O 确定的每一年，O 发出一个光讯号给 O'，O'在各个单向飞行中接受到多少个讯号？（换句话说，如果孪生兄弟 O'通过望远镜来看他姐妹，他实际上看到了什么？

解 ☞ O 看到兄弟 O'在 $t = 5$ a时刻到人马座 α，为了光讯号能够与 O'同时到达人马座 α，O 要在较早一些的时间来发送它，关系是

$$\text{时间} = \frac{\text{距离}}{\text{速度}} = \frac{5\text{a} \times (0.8\ \text{光年}/\text{a})}{1\ \text{光年}/\text{a}} = 4\text{a}^{*}$$

于是，由 O 在 $t = 1$a 发出的讯号随同 O'同时到达人马座 α'.因为 O 共送出10个讯号，其余9个讯号在回程时到达 O'.

6.12 参照题6.10和6.11.设想在由 O'确定的每一年，O'发一个光讯号给 O.考虑 O'刚到达人马座 α 时发出的讯号，当它被 O 接收时，由 O 确定的时间是多少？（即孪生姐妹 O 如果用望远镜看她的兄弟 O'，她看到了什么？）

解 ☞ 在 O 看来，她的兄弟到达人马座 α 的时间是 $t = 5$ a.由 O'从人马座 α 送出的讯号到达 O 需要时间（由 O 确定的）

* 原式似有些含义不清，今更改.——译者注

$$\Delta t = \frac{距离}{速度} = \frac{4a \times (1\ 光年/a)}{光年/a} = 4\ a$$

于是讯号到达 O 的时间是 $t = 5\ a + 4a = 9a$. 从而, 由 O' 发送出的 6 个讯号, 其中 3 个由 O 在前 9 年收到(每 3 年 1 个讯号), 而剩下的 3 个由 O 在最后 1 年收到.

6.13 火箭后部一个人射出一高速子弹射向火箭前部的目标. 此人测定, 火箭的长为 60 m 而子弹的速率为 0.8 c. 找出由此人测定的子弹飞行时间.

解 ☞ 我们有

$$\Delta t = \frac{距离}{速度} = \frac{60\ \mathrm{m}}{0.8 \times 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}} = 2.50 \times 10^{-7}\mathrm{s}$$

6.14 参照题 6.13. 如果火箭以 0.6 c 速率相对于地球运动. 求出由地球上的观察者所测定的子弹飞行时间.

解 ☞ 将两个反洛伦兹变换相减:

$$t_B - t_A = \frac{(t'_B - t'_A) + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$= \frac{2.5 \times 10^{-7}\mathrm{s} + \frac{(0.6)(60\ \mathrm{m})}{3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 4.63 \times 10^{-7}\mathrm{s}$$

6.15 太空船 A 和 B 的长度分别是 90 m 和 200 m. 它们相向飞行, 在太空船 A 中的宇航员测定太空船 B 的顶端通过 A 船需要 5×10^{-7}s. 两船的相对速度是多少?

解 ☞ 由宇航员 A 确定

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{90\mathrm{m}}{5 \times 10^{-7}\mathrm{s}} = 1.8 \times 10^8 \mathrm{m/s} = 0.6\ c$$

6.16 在题 6.15 中, 由 B 前端的宇航员确定出他从前到后通过 A 的时间是多少?

解 ☞ 每一个观察者所确定的速率是相同的. 宇航员 B 测定的太空船长度缩短, 其大小为

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (90\mathrm{m}) \sqrt{1 - (0.6)^2} = 72\ \mathrm{m}$$

由 B 测定的时间区间是

$$\Delta t_B = \frac{L}{v} = \frac{72\mathrm{m}}{0.6 \times 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}} = 4 \times 10^{-7}\mathrm{s}$$

6.17 一火箭船长 90 m, 以 0.8 c 常速相对于地面运行. 当火箭船的前端通过一个地面上的观察者时, 船前端的宇航员放出一次闪光送向船尾. (a) 由宇航员和 (b) 地面上的观察者确定出的讯号到达飞船尾部的时间分别是多少?

解 ☞ (a) 设光讯号发出和光讯号到达火箭尾部的事件分别记以 A 和 B. 因为讯号沿反方向以光速 c 传播,

$$t'_B - t'_A = \frac{x'_B - x'_A}{-c} = \frac{-90\mathrm{m}}{-3 \times 10^8 \mathrm{m/s}} = 3 \times 10^{-7}\mathrm{s}$$

(b) 将两个逆洛伦兹变换相减有

$$t_B - t_A = \frac{(t'_B - t'_A) + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$= \frac{3 \times 10^{-7}\mathrm{s} + (0.8)\frac{(-90\mathrm{m})}{3 \times 10^8 \mathrm{m/s}}}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 1 \times 10^{-7}\mathrm{s}$$

6.18 参照题 6.17. 当火箭末端在地面观察者前通过时, (a) 按照地面观察者, 或 (b) 按照宇航员看来分别是什么时间?

解 ☞ (a) 从地面的观察者看来, 火箭的长度 L 是

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (90\ \mathrm{m}) \sqrt{1 - (0.8)^2} = 54\ \mathrm{m}$$

于是

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{54\ \text{m}}{0.8 \times 3 \times 10^8 \text{m/s}} = 2.25 \times 10^{-7} \text{s}$$

(b)
$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{90\text{m}}{0.8 \times 3 \times 10^8 \text{m/s}} = 3.75 \times 10^{-7} \text{s}$$

6.19 一个火箭相对于空间站的速率是 $2.4 \times 10^8 \text{m/s}$，观察者 O' 和 O 分别在火箭和空间站上，按照通常的方式来校准他们的时钟(即 $x = x' = 0$ 时 $t = t' = 0$)．设 O 用望远镜观察 O' 的时钟，当他的时钟为 30s 时，他看到 O' 的时钟的时间是多少？

解 ☞ 设 O' 发出的光讯号和 O 接收到这个讯号的事件分别记为 A 和 B．本问题归结为求出 t'_A．对事件 A 用逆洛伦兹变换，有

$$t_A = \frac{t'_A + (v/c^2)x'_A}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{t'_A + (v/c^2)(0)}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = \frac{t'_A}{0.6}$$

$$x_A = \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{0 + (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{m/s})t'_A}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = (4.0 \times 10^8 \text{m/s})t'_A$$

光讯号沿负方向以速率 c 传播，于是

$$x_B - x_A = -c(t_B - t_A)$$

将上面所得的数据代入，

$$0 - (4.0 \times 10^8 \text{m/s})t'_A = (-3 \times 10^8 \text{m/s})\left(30\text{s} - \frac{t'_A}{0.6}\right)$$

解出 $t'_A = 10.0$ s.

本处及题 6.20 的结果指出了看一个事件和测量同一事件的坐标之间的区别．

6.20 参照题 6.19．如 O' 通过望远镜看 O 的时钟，当他看到 O 的时钟的读数是 30 s 时，他自己的钟所显示的读数是多少？

解 ☞ 记从 O 发出光讯号而 O' 接收到这个讯号的事件分别记以事件 A 和 B．我们的问题是求出 t'_B．对事件 A 使用洛伦兹变换得到

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{0 - (3 \times 10^8 \text{m/s})(30\ \text{s})}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = -150 \times 10^8 \text{m}$$

$$t'_A = \frac{t_A - (v/c^2)x_A}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{30\text{s} - (v/c^2)(0)}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = 50\ \text{s}$$

当由 O' 时，光讯号沿着正向以速率 c 传播，所以

$$x'_B - x'_A = c(t'_B - t'_A)$$

代进前面的数据，

$$0 - (-150 \times 10^8 \text{m}) = (3 \times 10^8 \text{m/s})(t'_B - 50\text{s})$$

解出 $t'_B = 100$ s.

6.21 在 $t = t' = 0$ 在原点发出的球形光脉冲方程是

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

用洛伦兹变换证明，这个光脉冲在 O' 中也是球形的，与爱因斯坦假说 2：光速对于任何观察者来说都是相同的，相一致．

解 ☞ 从逆洛伦兹变换

$$x^2 = \left[\frac{x' + vt'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\right]^2 = \frac{1}{1-(v^2/c^2)}(x'^2 + v^2t'^2 + 2vx't')$$

$$t^2 = \left[\frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\right]^2 = \frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left(\frac{v^2}{c^4}x'^2 + t'^2 + \frac{2v}{c^2}x't'\right)$$

$$y^2 = y'^2, \quad z^2 = z'^2$$

由此找到

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

于是，因为 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$，我们有

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$$

所以由 O' 确定的脉冲也是球形的.

6.22 证明微分表达式

$$dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$$

在洛伦兹变换下是不变的.

证 ☞ 如果该表达式是不变的，当用带撇坐标写出时将保持同样的形式. 从逆洛伦兹变换得到

$$dx^2=\left[\frac{dx'+v\,dt'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\right]^2=\frac{1}{1-(v^2/c^2)}(dx'^2+v^2dt'^2+2v\,dx'dt')$$

$$dt^2=\left[\frac{dt'+(v/c^2)dx'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\right]^2=\frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left(\frac{v^2}{c^4}dx'^2+dt'^2+\frac{2v}{c^2}dx'dt'\right)$$

$$dy^2=dy'^2,\quad dz^2=dz'^2$$

6.23 证明电磁波方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$$

在洛伦兹变换下是不变的.

解 ☞ 如果使用新变量 x',y',z',t' 仍能保持相同的形式，则方程是不变的. 为了将波动方程用带撇变量写出，我们先从洛伦兹变换找到

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},\quad \frac{\partial x'}{\partial t}=-\frac{v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x}=-\frac{v/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},\quad \frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial z}=1,\quad \frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial z}=\frac{\partial y'}{\partial x}=\cdots=0$$

从复合求导公式及利上述结果，我们有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\frac{\partial\phi}{\partial x'}+\frac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\frac{\partial\phi}{\partial t'}$$

对 x 再一次求导

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}-\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'}\right)$$

类似地，我们有

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{-v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\frac{\partial\phi}{\partial x'}+\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\frac{\partial\phi}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\left(v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}-2v\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'}\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2},\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}$$

将所得的结果代进波动方程，有

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}$$

所以这个方程在洛伦兹变换下不变. 注意波动方程在伽利略变换下不保持不变(题 1.10).

补 充 习 题

6.24 一个平均寿命为 4 μs 的不稳定粒子在高能加速器中产生并且以 0.6 c 速率穿过实验室. 问(a)由实验室的观察者看来，这个粒子的平均寿命是多少？(b)粒子在衰变前在实验室中穿行的平均距离是多少？(c) 一个与粒子相对静止的观察者觉得在粒子衰变前走了多远？

答案:(a)5 μs;(b)900 m;(c)720 m

6.25 寿命为 8×10^{-6}s 的 μ 子在 10000 m 高的上层大气中生成并且垂直射向地球. 如果 μ 子在射及地表时衰变,问它相对于地球的速率是多少?

答案:0.972 c

6.26 一根米尺以速度 0.6 c 沿着 x 轴运动. 米尺的中点在 $t=0$ 时通过 O. 由 O 看来,在 $t=0$ 时,米尺的端点在哪里?

答案:40 cm 和 −40 cm

6.27 观察者 O 测出在他的 xy 平面内静止的圆面面积是 12 cm^2. 观察 O' 相对于 O 以 0.8 c 运动,也来观察这个图形. O' 测到的面积是多少?

答案:7.2 cm^2

6.28 观察者 O 看了红光闪烁,10^{-6}s 后在 x 轴上 600 m 远处有蓝光闪烁. 如果另一个观察者 O' 确定红光和蓝光是同时闪烁的,他的速度大小及方向是什么?

答案:+0.5 c

6.29 参照题 6.28. 由 O' 确定的红光闪烁和蓝光闪烁的地点间隔是多少?

答案:520 m

6.30 一艘宇宙飞船长 150 m,以 0.6 c 速率运动. 当火箭末端通过一个在静止空间站中的人时,此人发出一个传向前端的闪光. 问:(a)当光到达前端时,它离空间站多远?(b)由在空间站的观察者测量,光讯号从发出到抵达共用去多少时间?(c)在火箭前端的观察者看来这个讯号从发出到接收的时间区间有多大?

答案:(a)300 m;(b)10^{-6}s;(c)0.5×10^{-6}s

6.31 由一个观察者确定:两个事件发生在同一地点,相隔 4 s 时间间隔. 如果第二个观察者测定这两个事件之间的时间间隔是 5 s,那么他确定的空间间隔是多少?

答案:9×10^8m

6.32 一个观察者在他的 x 轴上点燃两个闪光灯泡. 他记下第一个灯泡在他的原点在 1 点钟时点着,而第二个灯泡在 20 s 后在 $x=9\times10^8$m 处点着. 第二个观察者以 −0.6 c 的速率相对于第一个观察者沿共同的 $x-x'$ 轴运动. 由第二个观察者看来,这两闪烁事件的时间和空间间隔分别是什么?

答案:27.3 s,56.3×10^8m

6.33 O 和 O' 的相对速率是 0.8 c. 一颗超级子弹在 $x'=100$ m 处于 $t'=2\times10^{-7}$s 时射出. 它以常速沿负 x' 一方向运动,在 $t'=6\times10^{-7}$s 时击中了立在 O' 原点的目标. 在 O 看来,子弹的速率是多少?它穿行了多远?

答案:3×10^7m/s;6.67m

6.34 基地上的观察者确定,火箭以 5×10^{-7}s 时间穿过两个相距 90 m 的基地标志物之间的间隔. 由基地上观察者看来,火箭的速率是多少?

答案:0.6 c

6.35 参照题 6.34. 由火箭上的观察者看来,两个标志之间的距离是多少?而穿过这两个标志间的间隔所用的时间是多少?

答案:72 m;4×10^{-7}s

6.36 激光束以 150r/min 旋转并且投射到 50000 mi 远的屏幕上. 光束横扫过屏幕的速率是多少?

答案:7.85×10^5mi/s(注意,因为 $c=1.86\times10^5$mi/s,这个横扫速率大过 c.)

6.37 证明表达式 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ 和 $dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$ 在伽利略变换下不能保持不变.

第7章 相对论速度变换

为了找到速度变换，我们考虑与探讨洛伦兹坐标变换时相同的方案(图 1.1). 第一个观察者，O'，沿共同的 $x-x'$轴以常速 v 相对于第二个观察者，O，移动. 他们测量同一个粒子的速度，对于这个粒子的速度分量，由 O 记录下来的是(u_x, u_y, u_z)，由 O'记录下来的是(u'_x, u'_y, u'_z). 由洛伦兹变换，我们找到下面的洛伦兹速度变换(见题 7.1)：

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x}, \quad u'_y = \frac{u'_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c^2)u_x}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c^2)u_x} \tag{7.1}$$

如前，如果 O'沿正 x 方向运动，v 为正，而如果 O'沿负 x 方向运动，v 为负，将上述方程反转，我们有

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+(v/c^2)u'_x}, \quad u_y = \frac{u_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1+(v/c^2)u'_x}, \quad u_z = \frac{u_z\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1+(v/c^2)u'_x} \tag{7.2}$$

注意，如同洛伦兹坐标变换，逆速度变换可以在速度变换(7.1)中将带撇变量与无撇变量互换并且让 $v\to -v$ 而得. 这是对称性所希望的，因为从 2.4 节的假说 1，两个观察者是完全等价的，而观察者 O 以速度 $-v$ 相对于 O'运动.

7.1 洛伦兹速度变换和光速

重新考虑 3.1 节中的实验，当 O 和 O'在 $t=t'=0$ 相遇时在 $x-x'$方向上送出一个光讯号. 如果 O 测定讯号的速度分量是 $u_x=c$，$u_y=u_z=0$，于是由式(7.1)O'将测到

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{c-v}{1-(v/c^2)c} = c, \quad u'_y = u'_z = 0$$

于是 O'也确定出光讯号以速率 c 传播，与爱因斯坦的第二个假说一致.

7.2 在求解速度问题时的一般考虑

速度问题中有三个对象：两个观察者，O 和 O'以及一个质点 P. 与质点 P 相关的有两个速度(因此有 6 个数)，与 O 有关的速度(u_x, u_y, u_z)和与 O'有关的速度(u'_x, u'_y, u'_z). 在速度变换中出现的量 v 是 O'相对于 O 的速度.

当人们触及速度问题时，人们必须首先确定问题中哪些对象可以认同为是 O，O'和 P. 这些认同有时是指明的，另一些时候是不确定的(例如，见题 7.3). 等到认同一完成，人们可用适当的洛伦兹速度变换去求出解答.

在处理速度问题时，避免错误的一个最好的方式是不要忘记术语“相对于”.(无论从经典的意义还是相对论的意义)术语“一个物体的速度”是没有意义的，因为速度总是相对于某种物体测量的.

7.3 相对论多普勒效应

考虑一个源放出电磁辐射，由与源相对静止的观察者测出其频率为 ν_0. 设这个源相对于另一个观察者是运动的，他测得从这个源射来的辐射频率 ν. 图 7-1 定义了角度 θ 和速度 v，由观察者 O 测定的频率 ν 由多普勒方程给出：

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c)\cos\theta}$$

如果源和观察者相对靠近移动，$\theta=0$，于是有

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

本处，$\nu > \nu_0$.

如果源和观察者彼此离开运动，$\theta = 180°$，并且我们有

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

这时 $\nu < \nu_0$.

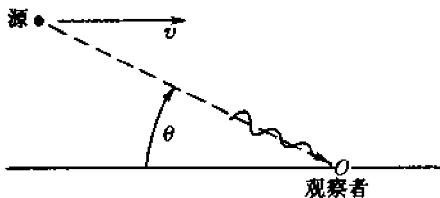


图 7-1

如果在与运动方向垂直的方向上，$\theta = 90°$，观察到辐射，我们有

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-(v^2/c^2)}$$

于是，$\nu < \nu_0$.

因为全部观察者测到的光速都是 c，上述的方程也包含着波长 $\lambda = \frac{c}{\nu}$ 的改变.

例题详解

7.1　导出对于 x 方向上的洛伦兹速度变换.

解　取微分的洛伦兹变换(3.1)，我们找到

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \qquad dt' = \frac{dt - \left(\frac{v}{c^2}\right)dx}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

由 dt' 除 dx' 有

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - \left(\frac{v}{c^2}\right)dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x}$$

7.2　在多大的速率下，对于 u'_x 的伽利略表达式和洛伦兹表达式相差 2%.

解　在伽利略变换下，$u'_{xG} = u_x - v$，而在洛伦兹变换下有

$$u'_{xR} = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{u'_{xG}}{1-(v/c^2)u_x}$$

整理为

$$\frac{u'_{xR} - u'_{xG}}{u'_{xR}} = \frac{vu_x}{c^2}$$

于是，如果乘积 vu_x 超过 $0.02\,c^2$，则利用伽利略变换的结果去代替洛伦兹变换的结果，其误差会超过 2%.

7.3　火箭 A 向右运动而火箭 B 向左运动，相对于地球的速度分别为 $0.8\,c$ 和 $0.6\,c$. 由火箭 B 测到的火箭 A 的速度是多少？

解　设 O, O' 和质点分别与地球，火箭 B 和火箭 A 联系起来. 于是

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{0.8c-(-0.6c)}{1-\frac{(-0.6\,c)(0.8c)}{c^2}} = 0.946\,c$$

这个问题也可以用其他的关连方式求解. 例如，设观察者 O, O' 和质点分别与火箭 A，火箭 B 和地球联系起来. 于是

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x} \quad 或 \quad 0.6\,c = \frac{-0.8c - v}{1-(v/c^2)(-0.8c)}$$

解出 $v = -0.946\,c$，它与上面的解答一致(出现了负号是因为 v 是 O' 相对于 O 的速度，按照刻下的关连方式是火箭 B 相对于火箭 A 的速度.)

7.4 重复题 7.3,如果火箭 A 相对于地球以速度 0.8 c 在 $+y$ 方向运动(火箭 B 仍旧在 $-x$ 方向运动.)

解 ☞ 设观察者 O, O' 和质点分别与地球,火箭 B 和火箭 A 相联系.于是

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{0-(-0.6c)}{1-0} = 0.6\,c$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{(0.8c)\sqrt{1-(0.6)^2}}{1-0} = 0.64\,c$$

这两者确定了所要的速度的大小和方向

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(0.6c)^2+(0.64c)^2} = 0.88c$$

$$\tan\phi' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.64c}{0.60c} = 1.07 \quad 或 \quad \phi = 46.8°$$

7.5 由 O 观察到,一个质点以 $0.8c$ 的速率沿着与 x 轴成 30°角的直线运动.从以速率 $-0.6\,c$ 沿着相同的 x-x' 轴运动的第二个观察者 O' 看来,质点的速度是什么?

解 ☞ 对于观察者 O,我们有

$$u_x = (0.8c)\cos30° = 0.693c$$

$$u_y = (0.8c)\sin30° = 0.400c$$

利用洛伦兹速度变换,对于观察者 O' 有

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{0.693c-(-0.6c)}{1-\frac{(-0.6c)}{c^2}(0.693c)} = 0.913c$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{(0.4c)\sqrt{1-(0.6)^2}}{1-\frac{(-0.6c)}{c^2}(0.693c)} = 0.226c$$

由观察者 O' 测定的速率是

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(0.913c)^2+(0.226c)^2} = 0.941c$$

而速度与 x' 轴的夹角 ϕ' 有

$$\tan\phi' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.226c}{0.913c} = 0.248 \quad 或 \quad \phi' = 13.9°$$

7.6 考虑一个放射核,它以 $0.5c$ 常速相对于实验室运动.这个核衰变并且沿运动方向放出电子,其相对于核的速率为 0.9 c.求出电子在实验室中的速度.

解 ☞ 设实验室观察者,辐射核和电子分别与 O、O' 及质点相联系.于是

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+(v/c^2)u'_x} = \frac{0.9c+0.5c}{1+\frac{(0.9c)(0.5c)}{c^2}} = 0.996c$$

7.7 参照题 7.6.有一个与核相对静止的观察者确定,这个核衰变并且放出速率为 $0.9c$ 的电子,其方向垂直于(实验室的)运动方向.求出由实验室系中观察者所确定的电子的速度.

解 ☞ 建立与题 7.6 中同样的关连,有

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+(v/c^2)u'_x} = \frac{0+0.5c}{1+0} = 0.5c$$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1+(v/c^2)u'_x} = \frac{(0.9c)\sqrt{1-(0.5)^2}}{1+0} = 0.779c$$

而

$$u = \sqrt{u_x^2+u_y^2} = \sqrt{(0.5c)^2+(0.779c)^2} = 0.926c$$

和

$$\tan\phi = \frac{u_y}{u_x} = \frac{0.779c}{0.5c} = 1.56 \quad 或者 \quad \phi = 57.3°$$

7.8 在 $t=0$,观察者 O 放出一个光子,以速率 c 沿与 x 轴成 60°的方向运动.第二个观察者

O'以 $0.6c$ 的速率沿着共同的 $x-x'$ 轴运动.光子与 O' 的 x' 轴的夹角是多少?

解 ☞ 我们有

$$u_x = c\cos 60° = 0.500c, \quad u_y = c\sin 60° = 0.866c$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{0.5c - 0.6c}{1-\frac{(0.6c)(0.5c)}{c^2}} = -0.143c$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{(0.866c)\sqrt{1-(0.6)^2}}{1-\frac{(0.6c)(0.5c)}{c^2}} = 0.990c$$

于是

$$\tan\phi' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.990c}{-0.143c} = -6.92$$

以及 $|\phi'| = 81.8°$,这是与负 x' 轴的夹角.由 O' 测定的光子速度的大小是

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(-0.143c)^2 + (0.990c)^2} = c$$

与所要求的一致.

7.9 在静水中光的速率是 c/n,这里水的折射率可近似地记为 $n=4/3$.在 1851 年,斐索找出在(相对于实验室)以速率 V 运动的水中(相对于实验室)的光速可以记为

$$u = \frac{c}{n} + kV$$

这里他测出"拖曳系数"$k \approx 0.44$.求出由洛伦兹速度变换所确定的 k 值.

解 ☞ 相对于水静止的观察者将测到光速是 $u'_x = \frac{c}{n}$,将光当作是质点,实验室的观察者将得到它的速率是

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}u'_x} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{Vc}{c^2 n}} = \left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 + \frac{V}{nc}\right)^{-1}$$

对于小量 V 作近似

$$\left(1 + \frac{V}{nc}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{V}{nc}$$

有

$$u_x \approx \left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{nc}\right) \approx \frac{c}{n} + \left[1 - \frac{1}{n^2}\right]V$$

这里略去了与 V^2/c 同数量级的项.于是

$$k \approx 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{(4/3)^2} = 0.438$$

它与斐索的实验结果相同.

7.10 当源和观察者相互后退时,将多普勒求到 v/c 的一阶.

解 ☞

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\times\frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}} = \nu_0\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{\nu}{c}} \approx \nu_0\frac{c}{c+\nu}$$

这是经典的当接收者与介质相对静止时的多普勒效应的表达式.

7.11 一辆卡车以速率安排在 80 mi/h 开向雷达.如果雷达阵在 20×10^9Hz 频率下工作.雷达阵的巡查员观察到的频移是多少?

解 ☞ 到 v/c 的一阶,卡车所接收的频率是

$$\nu' = \nu_0\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \approx \nu_0\sqrt{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)} = \nu_0\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

这个卡车可以当作带有这种频率的运动源.反过来由雷达阵接收的频率是

$$\nu'' \approx \nu'\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \nu_0\left(1+\frac{v}{c}\right)^2 \approx \nu_0\left(1+\frac{2v}{c}\right)$$

从这里(80mi/h = 35m/s)有

$$\nu'' - \nu_0 \approx 2\frac{v}{c}\nu_0 = \frac{2\times 35\text{m/s}}{3\times 10^8\text{m/s}} \times 20\times 10^9\text{Hz}$$

$$= 4.67\times 10^3\text{Hz}$$

7.12 一颗星以 $5\times10^{-3}c$ 的速率远离地球,其上的钠 D_2 线(5890Å)的波长变化是多少?

解 ☞ 多普勒方程给出

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad 或 \quad \lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}$$

$$= (5890\text{Å})\sqrt{\frac{1+0.005}{1-0.005}} = 5920\text{Å}$$

这里,$\Delta\lambda = 5920\text{Å} - 5890\text{Å} = 30\text{Å}$.位移是移向了较大的波长(红移).

7.13 设在接收远处的星射来的光线中,钠 D_2 线(5890Å)有 100Å 的多普勒位移.求出这颗星的退行速度.

解 ☞

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}} \quad 或 \quad 5990\text{Å} = (5890\text{Å})\sqrt{\frac{1+\left(\frac{v}{c}\right)}{1-\left(\frac{v}{c}\right)}}$$

解出 $v = 0.017c$.

7.14 在火箭船以 $0.6c$ 速率远离空间站时,船上的人向空间站送去波长为 5000Å 的光.由空间站的观察者看来这束光的频率是多少?

解 ☞

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}} = \frac{3\times10^8\text{m/s}}{5\times10^{-7}\text{m}}\sqrt{\frac{1-0.6}{1+0.6}} = 3\times10^{14}\text{Hz}$$

7.15 参照题 7.14.有第一艘飞船以速率 $0.8c$ 相对于空间站运动,沿着相反的方向,问此船中乘客观察到的光的频率是多少?

解 ☞ 第一个火箭相对于第二个火箭的速度由洛伦兹速度变换求得:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} = \frac{0.6c-(-0.8c)}{1-\frac{(-0.8c)(0.6c)}{c^2}} = 0.946c$$

由第二个火箭所观察到的频率是

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-(u'_x/c)}{1+(u'_x/c)}} = \frac{3\times10^8\text{m/s}}{5\times10^{-7}\text{m}}\sqrt{\frac{1-0.946}{1+0.946}} = 1.0\times10^{14}\text{Hz}$$

补充习题

7.16 一个火箭相对于一个提着灯笼的人以 $c/3$ 的速度运动.火箭的驾驶员测量了从灯笼射向他的光的速率.用洛伦兹速度变换求出这个速率.

答案:c

7.17 相对于地球以 $0.8c$ 速度运动的火箭中的宇航员看到第二个火箭以速度 $0.7c$ 以相反方向擦过.地面上的观察者测得的第二个火箭的速度是多少?

答案:$0.227c$

7.18 火箭 A 中的观察者看到火箭 C 和 B 离开他沿相反的方向运动,速率分别为 $0.6c$ 及 $0.8c$.由 B 测量出 C 的速率是多少?

答案:$0.946c$(经典,$1.4c$)

7.19 观察者 O' 相对于另一个观察者 O 以速率 $c/2$ 沿 x-x' 轴运动. 观察 O 测得一个质点沿正 y 方向以速率 $c/\sqrt{3}$ 运动. 求出由 O' 测量时此质点的速度.

答案: $c/\sqrt{2}$, 135°

7.20 站在空间站站台上的人看见两个火箭船从相反方向擦身而过, 速率为 $0.9c$ 及 $0.8c$. 问其中一个火箭船相对于另一个火箭船的速率是多少?

答案: $0.988c$

7.21 导出 y 方向和 z 方向的洛伦兹速度变换.

7.22 从洛伦兹速度变换(7.1)导出逆洛伦兹速度变换(7.2).

7.23 静止的 K^0 介子衰变为一个 π^+ 介子和一个 π^- 介子, 每一个速率都是 $0.827c$. 当一个 K^0 介子在 $0.6c$ 速率下穿行时衰变, 其中的一个 π 介子所能取得的最大速率是多少?

答案: $0.954c$

7.24 如果光源以 $0.8c$ 的速率向观察者飞来, 其中 5500Å 的光的多普勒位移是多少?

答案: -3667Å

7.25 设人眼所能看到的最大波长是 6500Å. 问火箭应当运动多快使得火箭上的绿光($\lambda = 5000$Å)对于地球上的观察者成为不可见的.

答案: $0.257c$ 远离观察者

7.26 一颗星必须相对于地球后退得多快才能使给定的波长位移 0.5%?

答案: $4.99 \times 10^{-3}c$

第 8 章　相对论中的质量、能量和动量

8.1　重新定义经典动量的需要

从狭义相对论得出的主要进展之一是一个物体的质量将随着它的速度变化.对于这个变化的形式上的探讨见下面.

考虑一个弹道实验,这里一个观察者,例如说 O',在 y'方向射出一颗子弹射入一个与他不会相对移动的木坑之中.可以认为子弹射入木坑的总长度是由子弹动量的 y'分量,记为 $p'_y = m'u'_y$,确定的,这里 m'是由 O'测到的子弹的质量.

现在,从观察者 O 的观点来考虑同样的实验,O 看到观察者 O'在共同的 x-x'方向上以速度 v 运动.因为子弹所留下的径迹与相对运动方向成直角,O 将认为子弹钻进木块的距离与 O'的情况一样,因此子弹动量 y 分量期望与 O'的有相同数值.

由 O 确定,$p_y = mu_y$,这里 m 是由 O 测定的子弹质量.从洛伦兹速度变换我们找到,因为 $u'_x = 0$,

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1+(v/c^2)u'_x} = u'_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}$$

所以 $p_y = mu'_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}$.因为从上面讨论 $p'_y = m'u'_y$,这样如果两个观察者对子弹指定同样的质量,$m' = m$,则有 $p'_y \neq p_y$,与所期待的不一致.

8.2　质量随速度的变化

在这一点上我们有两种选择.我们可以假设动量原理——特别,动量守恒——在大速度时不成立,或者,我们可以寻找一种重新定义物体动量以保证动量原理在狭义相对论中成立.爱因斯坦挑选了后一种方案.他指出,所有的观察者都会肯定物体的质量 m 与它的速率 u 有关,关系是

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}$$

这里 m_0 是静止质量,是物体与观察者相对静止时测出的物体质量,则经典的动量原理保持适用.看题 8.1.

8.3　在相对论中的牛顿第二定律

牛顿第二定律的经典表达式是:作用于物体的净力等于物体动量的变化率.为了包容相对论效应,必须承认物体质量随速度改变的事实.于是牛顿第二定律的相对论推广是

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{u})$$

8.4　质量和能量关系:$E = mc^2$

像在经典力学中一样,在相对论力学中,物体动能 K 等于外力在物体的速率从零到某个数值 u 时所作的功,即

$$K = \int_{u=0}^{u=u}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$$

利用牛顿第二定律,$\mathbf{F} = \mathrm{d}(m\mathbf{u})/\mathrm{d}t$,我们找到这个表达式归结为(题 8.21)

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

动能 K 等于运动质点的总能量 E 和这个质点的静止能量 E_0 之差，所以

$$E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$$

如果选定静止能量使得 $E_0 = m_0c^2$，我们得到爱因斯坦的著名关系

$$E = mc^2$$

它表明质量和能量的等价.于是甚至在物体是静止的，它仍旧有能量内容，由 $E_0 = m_0c^2$ 给出，所以原则上物体的质量可以完全转换为另一种更为熟悉的能量形式.

8.5 动量和能量关系

因为动量，而不是速度，守恒，因此常用动量而不是它的速度去写能量表达式.最后，如果表达式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

平方并且在两边乘以 $c^4[1 - (u^2/c^2)]$，得到

$$m^2c^4 - m^2u^2c^2 = m_0^2c^4$$

利用结果 $E = mc^2$，$E_0 = m_0c^2$，以及 $|\mathbf{p}| = mu$，我们得到 E 和 P 之间的关系，

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \quad 或者 \quad (K + m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

8.6 能量和动量的单位

一个物体带有一个电子电荷的电量并且经过 1 伏特的电位差之后所得的动能称为 1 电子伏(eV).

$$1\text{eV} = (1.602 \times 10^{-19}\text{C})(1\text{V}) = 1.602 \times 10^{-19}\text{J}$$

$$1\text{MeV} = 10^6\text{eV}, \quad 1\text{GeV} = 10^9\text{eV}$$

关系 $1.602 \times 10^{-19}\text{J} = 1\text{eV}$ 可以当作是两个不同能量单位之间的转换因子.

动量的标准单位是 kg·m/s.在相对论计算中，动量经常用 MeV/c 作为单位.这个单位起因于能量-动量表达式

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}$$

转换因子是

$$1\,\frac{\text{MeV}}{c} = 0.534 \times 10^{-21}\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

8.7 在求解质量-能量问题中的一般考虑

在求解质量-能量问题中的一个常见的错误是用不正确的动能公式.注意

$$K \neq \frac{1}{2}m_0u^2 \qquad 以及 \qquad K \neq \frac{1}{2}mu^2$$

正确的动能公式是

$$K = (m - m_0)c^2$$

类似地，对于动量，注意

$$p \neq m_0u$$

例 题 详 解

8.1 说明爱因斯坦的质量-速度关系怎样解决了 8.1 节的轨道实验的困难.

解 ☞ 在 O' 观察，因为 $u'_x = 0$，子弹质量是

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u_x'^2+u_y'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u_y'^2}{c^2}}}$$

而由 O 测得的子弹质量是，因为 $u_x' = v$，

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u_x^2+u_y^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2+u_y^2}{c^2}}}$$

如果将洛伦兹变换应用到最后一个根号中的量中去，有

$$1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{u_y^2}{c^2} = 1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{c^2}\left(u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u_y'^2}{c^2}\right)$$

所以

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}\sqrt{1-(u_y'^2/c^2)}} = \frac{m'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

从而

$$p_y = mu_y'\sqrt{1-(v^2/c^2)} = \frac{m'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}u_y'\sqrt{1-(v^2/c^2)}$$

$$= m'u_y' = p_y'$$

8.2　按照附录中所给出的质量数据，计算电子的静止能量，用焦耳及电子伏表示.

解　☞ 我们有 $E_0 = m_0c^2 = (9.109\times10^{-31}\text{kg})(2.998\times10^8\text{m/s})^2 = 8.187\times10^{-14}\text{J}$，并且

$$(8.187\times10^{-14}\text{J})\left(\frac{1\text{eV}}{1.602\times10^{-19}\text{J}}\right)\left(\frac{1\text{MeV}}{10^6\text{eV}}\right) = 0.511\text{MeV}$$

8.3　一个静止物体瞬间分裂成两部分，它们在相反的方向上运动. 裂开部分的静止质量是 3kg 及 5.33kg 各自具有速率 $0.8c$ 和 $0.6c$. 求出原来物体的质量.

解　☞ 因为 $E_{\text{初}} = E_{\text{终}}$

$$m_0c^2 = \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-(v_1^2/c^2)}} + \frac{m_{02}c^2}{\sqrt{1-(v_2^2/c^2)}}$$

$$= \frac{(3\text{kg})c^2}{\sqrt{1-(0.8)^2}} + \frac{(5.33\text{kg})c^2}{\sqrt{1-(0.6)^2}}$$

$$m_0 = 11.66\text{kg}$$

8.4　一个电子在通过 10^5V 的电位差加速之后，它的最终速率是多少？

解　☞ 因为 $K = e\Delta V = 10^5\text{eV} = 0.1\text{MeV}$，有 $0.1\text{MeV} = K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - m_0c^2$

代进关系 $m_0c^2 = 0.511$ MeV(题 8.2)并且求解，我们得到 $v = 0.548c$

8.5　计算 $K = 1$MeV 电子的动量.

解　☞ $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$

$$(1\text{MeV} + 0.511\text{MeV})^2 = (pc)^2 + (0.511\text{MeV})^2$$

$$p = 1.42\text{MeV}/c$$

8.6　电子的动量为 2MeV/c，计算它的动能.

解　☞ $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$

$$(K + 0.511\text{MeV})^2 = \left(\frac{2\text{MeV}}{c}\times c\right)^2 + (0.511\text{MeV})^2$$

$$K = 1.55\text{ MeV}$$

8.7　计算动能是 2 MeV 电子的速度.

解　☞ $K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - m_0c^2$

$$2\text{MeV}=\frac{0.511\text{MeV}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-0.511\text{MeV}$$

$$v=0.98c$$

8.8 计算速度是 $0.8c$ 的电子的动量

解 ☞ $p=mv=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\left(\frac{v}{c^2}\right)=\frac{0.511\text{MeV}}{\sqrt{1-(0.8)^2}}\left(\frac{0.8}{c}\right)$

$=0.681\ \frac{\text{MeV}}{c}$

8.9 μ 子的静止质量是 $207m_{oe}$，这里 m_{oe} 是电子的静止质量，而它在静止时的平均寿命为 2×10^{-6}s. 如果 μ 子在实验室中的平均寿命为 7×10^{-6}s，这时 μ 子的质量是多少？

解 ☞ 从时间延长公式

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=\frac{\Delta t}{\Delta t_0}=\frac{7}{2}$$

所以

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=(207m_{oe})\left(\frac{7}{2}\right)=725m_{oe}$$

8.10 计算 5000Å 光子的有效质量.

解 ☞ $m_{有效}c^2=E_{光子}=h\nu=hc/\lambda$

(参见第 10 章)从而

$$m_{有效}=\frac{6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{(5\times10^{-7}\text{m})(3\times10^8\text{m/s})}=4.42\times10^{-36}\text{kg}$$

8.11 由电子同步加速器将电子加速到 2GeV 能量，这时电子质量与其静止质量的比值是多少？

解 ☞ 从 $mc^2=K+m_0c^2$，

$$\frac{m}{m_0}=\frac{mc^2}{m_0c^2}=\frac{K+m_0c^2}{m_0c^2}=\frac{2000\text{MeV}+0.511\text{MeV}}{0.511\text{MeV}}=3915$$

8.12 当 ^{235}U 核裂变时放出 200 MeV 能量. 它占可利用的总能量的百分比是多少？

解 ☞ ^{235}U 的静止质量近似地等于 235u，u 是普适原子质量单位. 利用转换关系 1 u = 931.5MeV，我们有

总的可供利用的能量 = ^{235}U 的静止能量 = $(235\text{u})\frac{931.5\text{MeV}}{\text{u}}=219\times10^3\text{MeV}$

$$\%\ 总能量=\frac{200\text{MeV}}{219\times10^3\text{MeV}}\times100\%=0.0913\%$$

8.13 一个电子从静止加速到 $0.5c$ 速度. 计算它的能量增量.

解 ☞ 能量增量 $=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}-m_0c^2$

$=\frac{0.511\text{MeV}}{\sqrt{1-(0.5)^2}}-0.511\text{MeV}=0.079\text{MeV}$

8.14 质点的速度与光速相比为多少，才能使得它的动能是静止能量的两倍？

解 ☞ $K=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}-m_0c^2=2m_0c^2$

或者 $\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=3$

解出 $v=0.943c$

8.15 电子的速度是 5×10^7m/s. 将这个速率增至两倍需要多少能量？

解 ☞ 初始能量 $=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{0.511\text{MeV}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.5\times10^8\text{m/s}}{3\times10^8\text{m/s}}\right)^2}}=0.518\text{ MeV}$

终了能量 $=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2v}{c}\right)^2}}=\dfrac{0.511\text{MeV}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1\times10^8\text{m/s}}{3\times10^8\text{m/s}}\right)^2}}=0.542\text{MeV}$

能量增量 $=0.024$MeV

8.16　一个 1MeV 光子与重核边上的静止电子并且被吸收.(一个自由电子不能俘获一个光子.)如果核的反跳能量可以略去,问在碰撞以后的电子的速度是多少?

解　☞ 从 $E_{初}=E_{终}$

$$E_p+m_{oe}c^2+m_{on}c^2=\frac{m_{oe}c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}+m_{on}c^2$$

或者 $1\text{MeV}+0.511\text{MeV}=\dfrac{0.511\text{MeV}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

解出 $v=0.941c$.

8.17　在实验室里一个电子以 $0.6c$ 速率运动.而一个观察者以 $0.8c$ 速度沿电子运动方向运动.由这个观察者确定的电子的能量是多少?

解　☞ 由洛伦兹速度变换,

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-(v/c^2)u_x}=\frac{0.6c-0.8c}{1-(0.8)(0.6)}=0.385c$$

并且

$$K'=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u'_x/c)^2}}-m_0c^2=\frac{0.511\text{MeV}}{\sqrt{1-(-0.385)^2}}-0.511\text{MeV}$$
$$=0.043\text{MeV}$$

8.18　一个质点的总能量是 6×10^3MeV 而动量是 $3\times10^3\text{MeV}/c$.它的静止质量是多少?

解　☞ 利用 $E^2=(pc)^2+E_0^2$,

$$(6\times10^3\text{MeV})^2=[(3\times10^3\text{MeV}/c)c]^2+E_0^2$$

解出　$E_0=5.2\times10^3$MeV,并且(参照题 8.12)

$$m_0=(5.2\times10^3\text{MeV})\left(\frac{1\text{u}}{931.5\text{MeV}}\right)=5.58\text{u}$$

8.19　参照题 8.18.在质点的动量为 $5\times10^3\text{MeV}/c$ 的坐标系中,它的能量是多少?

解　☞ $E^2=(pc)^2+E_0^2=[(5\times10^3\text{MeV}/c)c]^2+(5.2\times10^3\text{MeV})^2$

解出 $E=7.2\times10^3$MeV.

8.20　K^0 介子在静状态下衰变为两个 π^0 介子.如果 K^0 的静止能量是 498MeV,而 π^0 是 135MeV.问每个 π^0 的动能是多少?

解　☞ 因为在实验室系中其初始动量和末了动量必须相等,两个 π^0 按相反方向离开,各自的动能相等.

$$E_{初}=E_{终}$$
$$498\text{MeV}=2(135\text{MeV})+2K,\quad K=114\text{MeV}$$

8.21　对于 1 维运动,证明

$$K=\int_{u=0}^{u=u}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}=mc^2-m_0c^2$$

证　☞ 对于 1 维运动,

$$K=\int_{u=0}^{u=u}F\mathrm{d}x=\int_{u=0}^{u=u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mu)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{u=0}^{u=u}\mathrm{d}(mu)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\int_{u=0}^{u=u}(m\mathrm{d}u+u\mathrm{d}m)u$$
$$=\int_{u=0}^{u=u}(mu\mathrm{d}u+u^2\mathrm{d}m)\tag{1}$$

对于质量-速度关系式，我们有

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} \quad 或 \quad m^2c^2 - m^2u^2 = m_0^2c^2$$

在双边取微分，有

$$2mc^2\mathrm{d}m \quad m^2 2u\mathrm{d}u - u^2 2m\mathrm{d}m = 0$$

它可以重新写为

$$mu\mathrm{d}u + u^2\mathrm{d}m = c^2\mathrm{d}m \tag{2}$$

式(2)的左方恰好是式(1)的被积函数，所以我们得到

$$K = \int_{m=m_0}^{m=m} c^2\mathrm{d}m = c^2(m - m_0)$$

8.22　证明当 $v/c \ll 1$ 时，$E - E_0$ 的二项展开化为 $\frac{1}{2}m_0u^2$.

证　☞ $E - E_0 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{-1} - 1\right]$

$$= m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots\right) - 1\right] \approx \frac{1}{2}m_0u^2$$

8.23　如果质点的动能可以记成 $\frac{1}{2}m_0v^2$ 而误差保持在 0.5% 之内，它的可能最大的速率是多少?

解　☞ 在最大速率时

$$\frac{K - \frac{1}{2}m_0u^2}{K} = 0.005 \quad 或者 \quad K = \frac{\frac{1}{2}m_0u^2}{0.995}$$

但在题 8.22 中

$$K = m_0c^2\left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] = m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}m_0u^2 + \frac{3}{8}m_0u^2\left(\frac{u^2}{c^2}\right) + \cdots$$

从而

$$\frac{\frac{1}{2}m_0u^2}{0.995} \approx \frac{1}{2}m_0u^2 + \frac{3}{8}m_0u^2\left(\frac{u^2}{c^2}\right)$$

解出，$u \approx 0.082c$

8.24　设一个作用在质点上的力 F 与它的速度的方向相同. 写出与牛顿第二定律对应的表达式.

解　☞ 力 F 是动量的时间导数:

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0u}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right] = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{m_0u}{[1-(u^2/c^2)]^{3/2}}\frac{u}{c^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{m_0\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{[1-(u^2/c^2)]^{3/2}}\left(1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{m_0\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{[1-(u^2/c^2)]^{3/2}}$$

8.25　一个电荷为 q 的质点，在半径为 R 的圆周上运动，轨道面与磁场 B 垂直，利用牛顿第二定律求出该质点速度的相对论表达式.

解　☞ 牛顿第二定律的矢量形式是

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{u}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}/c^2)}}\right]$$

利用复合变量规则进行求导，我们有

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}/c^2}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{m_0}{[1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}/c^2]^{3/2}}\frac{\mathbf{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}}{c^2}\mathbf{u}$$

在磁场中,速度和加速度是垂直的,所以

$$\mathbf{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = 0$$

此外,

$$F_r = quB \quad 和 \quad \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{u^2}{R}$$

于是

$$quB = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\frac{u^2}{R} \quad 或 \quad u = \frac{qBR/m_0}{\sqrt{1+(qBR/m_0c)^2}}$$

在上述表达式中令 $c\to\infty$ 即得到经典速度

8.26 两个完全相同的物体,每个静止质量为 m_0,以相等速度靠近,进行一次完全的非弹性碰撞后粘在一起.确定复合物体的静止质量.

解 ☞ 因为初始速度大小相等,最终动量必然是零.

$$E_{初} = E_{终}$$

$$\frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = M_0c^2$$

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} > 2m_0$$

8.27 在题 8.26 中,由一个与初始物体之一相对静止的观察者看来,复合物体的静止质量是多少?

解 ☞ 考虑在 $+x$ 方向运动的物体 A.与 A 相对静止的观察者 O' 的速度 v 等于 A 的速度 $v=u$.第二个物体 B 由 O 测出的速度是 $u_B=-u$.它的由 O' 测到的速度 u'_B 可由洛伦兹速度变换定出:

$$u'_B = \frac{u_B - v}{1-\frac{u_Bv}{c^2}} = -\frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}}$$

因为复合物体 C 相对于实验室(观察者 O)静止,它对着 O' 的速度是 $u'_C=-u$.由动量守恒,由 O' 确定,

$$\frac{m_0u'_A}{\sqrt{1-(u'^2_A/c^2)}} + \frac{m_0u'_B}{\sqrt{1-(u'^2_B/c^2)}} = \frac{M_0u'_C}{\sqrt{1-(u'^2_C/c^2)}}$$

但是 $u'_A=0$

$$\frac{m_0\dfrac{-2u}{1+\left(\frac{u^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{1-\left[\dfrac{2u/c}{1+(u^2/c^2)}\right]^2}} = \frac{M_0(-u)}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}$$

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}$$

这个结果由观察者 O 按照能量考虑所获得的结果相同(题 8.26).

8.28 一个静止质量为 m_0 以 $0.8c$ 速率运动的质点与一个静止质量为 $3m_0$ 处于静止状态的质点作完全非弹性碰撞.问所生成的单个物体的静止质量是多少?

解 ☞ 从 $p_{初}=p_{终}$

$$\frac{M_0u_f}{\sqrt{1-(u_f^2/c^2)}} = \frac{m_0u_i}{\sqrt{1-(u_i^2/c^2)}} = \frac{m_0(0.8c)}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = \frac{4}{3}m_0c$$

从 $E_{初}=E_{终}$

$$\frac{M_0c^2}{\sqrt{1-(u_f^2/c^2)}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u_i^2/c^2)}} + 3m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(0.8)^2}} + 3m_0c^2 = 4.67m_0c^2$$

将这两个方程一齐求解,我们得到

$$u_f = 0.286c, \quad M_0 = 4.47m_0$$

8.29 当 100 kg 的铜,它的温度增加 100℃,求出它增加的质量.(铜的比热是 $\mathscr{C} = 93\text{cal/kg}\cdot℃$)

解 ☞ 加在铜块上的能量是

$$\Delta E = m\mathscr{C}(\Delta T) = (100\ \text{kg})92\text{cal/(kg}\cdot℃)(100℃)\cdot(4.184\text{J/cal})$$
$$= 39 \times 10^5\text{J}$$

如果这个能量呈现为质量的增加,则

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{39 \times 10^5\text{J}}{(3 \times 10^8\text{m/s})^2} = 4.33 \times 10^{-11}\text{kg}$$

这点增量小到难以测量.

补充习题

8.30 参照附录中给出的静止质量,用焦耳表示出一个原子质量单元的静止质量.

答案:1.49×10^{-10}J

8.31 计算速度是 $0.8c$ 的质子的动能.

答案:625.5MeV

8.32 计算动能是 200MeV 的质子的动量.

答案:644.5MeV/c

8.33 计算动量是 200MeV/c 的中子的动能.

答案:21.0MeV

8.34 计算动能是 200MeV 的质子的速度.

答案:$0.566c$

8.35 动能为 1GeV 的质子的质量是多少?

答案:$m = 2.07m_{0p}$, m_{0p}是质子的静止质量.

8.36 当质点的动能等于它的静止能量时,它的速度是多少?

答案:$0.866c$

8.37 设一个质点的相对论质量比它的静止质量大 5%.它的速度是多少?

答案:$0.305c$

8.38 当(a)一个电子;(b)一个质子通 15 MV 的电势差从静止开始加速时,它们的相对论质量和静止质量之比分别是多少?

答案:(a)30.35,(b)1.015

8.39 如果认为电子经过一个电势差按照经典物理规律加速到光速,电子的质量是多少?

答案:$\frac{3}{2}m$.

8.40 参照题 8.20,各个 π^0 的速度和动量分别是多少?

答案:$0.84c$;209MeV/c

8.41 设电子在磁通密度为 $0.03T$ 的均匀磁场中作半径为 0.2m 的圆形轨道运动.电子的速度和动能各是多少?

答案:$0.962c$;1.36MeV

8.42 如果宇宙飞船的最终载荷的静止质量是 5000kg,将它加速到速率 $0.8c$ 的最小能量是多少?

答案:3×10^{20}J

8.43 0.8MeV 的电子在磁场中作半径为 5cm 的圆形轨道运动.其磁感应强度是多少?

答案:8.07×10^{-2}T

8.44 20MeV 的电子在磁通密度为 5T 的均匀磁的垂直的截面内运动,计算它的半径.

答案:1.37cm

8.45 一个静止质量为 m_0 以 $0.6c$ 速率运动的粒子撞击并且粘在了一个初始静止的相同类型的粒子上.问复合粒子的静止质量和速度分别是多少?

答案:$2.12m_0$;$0.333c$

8.46　一个静止质量为 m_0 而动能为 $3m_0c^2$ 的粒子与一个静止质量为 $2m_0$ 的静止粒子作完全非弹性碰撞.问复合粒子的速度和静止质量分别是多少?

答案:$0.645c$;$4.58m_0$

8.47　静止为 140MeV 的 π^+ 介子在海平面上高 100 km 处产生并且垂直向下运动.在 π^+ 自身的坐标系中测量,它将在产生 2×10^{-8}s 后衰变,问在海平面上多高的地点发生了衰变.

答案:93.6km

第Ⅱ部分　电磁辐射和物质的量子理论

第 9 章　电磁辐射——光子

9.1　光子理论

按照量子理论，电磁辐射由类似于粒子的光子或光量子组成，是不连续的能量束．光子的能量 E 只与辐射的频率有关，其关系是

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

这里 $h = 6.626 \times 10^{-34} \mathrm{J \cdot s}$ 是普朗克常数．

因为光子以光速传播，按照相对论，它们必然只有零静止质量；从而它们的能量全部是动能．如果光子存在，它们以光速运动；如果它不以光速运动，它就不再存在．对于 $m_0 = 0$，相对论动量-能量关系（8.5 节）成为 $E = pc$．于是一个光子具有动量

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

从量子观点来看，电磁能束由以速率 c 运行的光子所组成．束流强度正比于单位时间通过单位横断面的光子数．从而，如果束流是单色的（一个频率的），强度 I 由下式给出：

$$I = (\text{一个光子的能量}) \times \frac{\text{光子数}}{\text{面积} \times \text{时间}}$$

为了便于计算，可用下述非标准单位的表达式：

$$h = 4.136 \times 10^{-15} \mathrm{eV \cdot s}$$
$$hc = 12.4 \mathrm{keV \cdot \mathring{A}}$$

这里 $1\mathrm{eV} = 10^{-3}\mathrm{keV} = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{J}$ 和 $1\mathrm{\mathring{A}} = 10^{-10}\mathrm{m}$

9.2　光电效应

在光电实验里，光照到放在真空管中的金属表面上，并且有电子从表面发送出来，如同图 9-1 所示．光的频率 ν 和强度 I，反向电压 V，和发射极的材料都可以更动．如果电子有足够的能量，它们将会克服反向电压 V 面到达收集极并且成为电流 i 而在电流表 A 中记录下来．为了能够到达收集极，电子的动能必须等于或大于从发射极到收集极所增益的电位能，即

$$\frac{1}{2}m_e v^2 \geqslant eV$$

如果小于此值，它们在到达收集极之前将折回，并且也不被记录作为电流．

实验结果是

1．电流几乎是瞬刻开始，即使光强非常低也是如此．在入射光照到表面到观察到电子之间的延时是 $10^{-9}\mathrm{s}$ 数量级，并且与光强无关．

2．当频率和反向电位保持不变，电流正比于入射光的光强．

3．当频率和光强保持固定，当反向电压增大时电流减小，增至某个截止电压时电流为零．

4．对于给定的发射极材料其截止电压随频率呈线性形态，其关系是

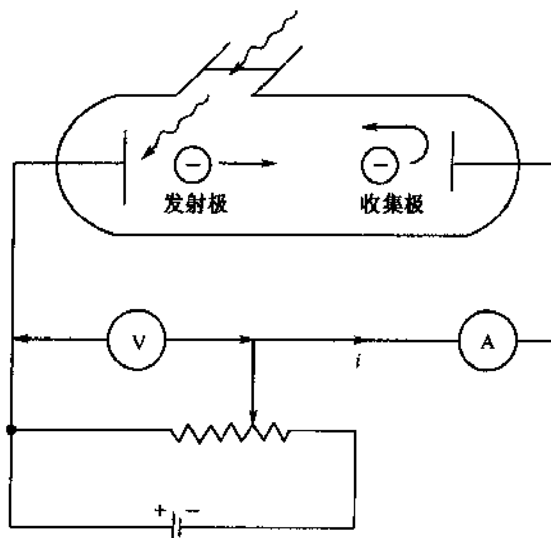


图 9-1

$$eV_s = h\nu - eW_0$$

常数值项 eW_0 随材料而定，但斜率 h 对于各种材料都是同一数值，即普朗克常数(参见题 9.10).

5. 对于一个指定的材料，这里存在着一个阈频率 ν_0，低于这个频率不论光强有多大都不会有电子发射出来.

光的波动说仅能阐明结果(2)，电流随着光强的增大而增加，因为光强越大，由波传送过去的能量越多，发出的电子也就越多. 而其他的结果用波动说完全不可理解(参见题 9.9).

光由光子组成的量子解释阐明了全部实验结果. 在量子理论中一个光子所具有的能量由单个的电子所吸收. 如果电子从材料中喷出，电子所吸收的能量和解脱表面限制的能量之差呈现为电子的动能. 束缚在表面下的电子具有不同的能量，但其最小束缚电子的结合能与发射极的材料有关. 移去最小束缚电子所需要的能量称为材料的功函数 ϕ. 从而喷出的电子带有不同的动能，其范围是从零到某个最大值，其关系为

发射电子的最大动能

=(光子所带的能量)-(最小束缚电子的结合能)

于是解释了实验结果(3). 因为 $K_{max} = eV_s$，最大能量关系为

$$eV_s = h\nu - \phi$$

这里 $\phi = eW_0$. 从而解释了结果(4)的线性关系，而所存的频率阈(结果(5))由下述关系给出：

$$h\nu_{th} = eW_0$$

在这个阈频率之下，无论光强有多大，入射光子都没有足够的能量去释放最小束缚电子. 因为光子几乎是瞬时吸收的，这阐明了实验结果(1)中的短弛豫时间. 最后，光越强，光子密度越大，从而有更多的电子喷出，于是阐明了结果(2).

9.3 康普顿效应

波动解释指出，当电磁波从一个载荷粒子处散射，在各个方向上的散射辐射都与入射辐射的频率相同. A.H. 康普顿在 1922 年指出：如果接受电磁辐射的量子解释，则散射辐射的频率将小于入射辐射的频率，还与散射角有关.

康普顿的分析实际上把电磁波从载荷粒子上的散射当作是光子和有效的自由带电粒子之间的完全弹性球式的碰撞，如图 9-2 所示. 即使相互作用的细节未能知晓，但可用能量和动量守恒. 于是找出了散射后的光子的波长改变量 $\Delta\lambda$ 为

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

(参见题 9.27). 量 h/m_0c 通常称为康普顿波长;对于电子来说其数值是 0.0243Å. 注意波长的变化仅与散射角 θ 有关,与入射光子的能量无关.

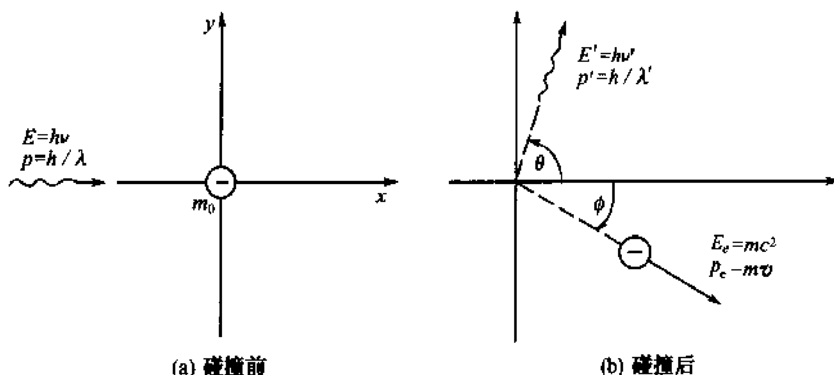


图 9-2

康普顿用实验验证他的理论关系,他将 X 射线($\lambda=0.7$Å)在石墨上进行散射. X 射线的能量(1.8×10^4eV)比起碳的外层电子结合能要高几个数量级,所以将这些电子当作是自由粒子是一个好的近似.

9.4　对产生和对湮没

在对产生过程中,一个光子的能量完全转化为物质,其结果是产生了电子-正电子对,如图 9-3 所示(除去电荷之外,正电子与电子的其他性质都相同.)因为在初始时刻系统的电荷为零,由于电荷守恒必然产生两个相反电荷的粒子. 为了产生一对,入射光子的能量至少具与此对的静止能量相同的能量,光子的多余能量将转化为粒子的动能.

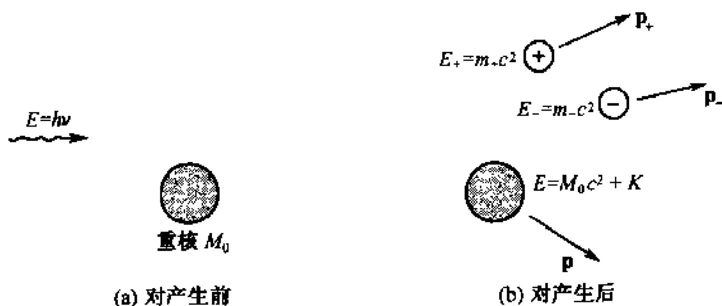


图 9-3

对产生不能在真空中实现(见题 9.31). 从而在图 9-3 中指出存在一个重核. 这个重核带走入射光子显然具有的动量,但是由于它的大质量,其反冲动能 $K\approx p^2/2M$. 比起电子-正电子对动能来通常可以略去. 子是能量(并非动量)守恒中可将重核的一部分略去,有

$$h\nu = m_+c^2 + m_-c^2 = K_+ + K_- + 2m_0c^2$$

因为正电子和电子具有同样的静止质量, $m_0=9.11\times10^{-31}$kg.

对产生的逆过程也可以出现. 在对湮没中,正电子-电子对湮没,其结果是生成两个(或更多的)光子,如图 9-4 所示. 由于能量守恒和动量守恒,至少要生成两个光子. 与对产生相对照,对湮没可以在真空中发生,并且可用能量和动量原理,于是

$$E_i = E_f \quad 或 \quad 2m_0c^2 + K_+ + K_- = h\nu_1 + h\nu_2$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f \quad \text{或} \quad m_+ \mathbf{v}_+ + m_- \mathbf{v}_- = \frac{h}{2\pi}\mathbf{k}_1 + \frac{h}{2\pi}\mathbf{k}_2$$

$E_+ = m_+c^2 = m_0c^2 + K_+$

$E_- = m_-c^2 = m_0c^2 + K_-$

$h\nu_1$

$h\nu_2$

(a) 对湮没前　　(b) 对湮没后

图 9-4

这里 **k** 是光子的波矢，$|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$.

对产生和对湮没也可以是其他粒子和反粒子，例如质子和反质子(见题 9.92).

9.5 光子的吸收

当光束通过材料时，由于光电效应，康普顿效应和对产生的某些联合作用，使得光子在前进方向上离开或散射，辐射束的光强将衰减. 强度衰减满足指数衰减定律

$$I = I_0 e^{-\mu x} \tag{9.1}$$

这里 I_0 是入射到吸收物质处的强度，而 μ(线吸收系数)对于给定光子能量来说是一个常数，它与吸收材料性能有关. 对于给定的材料，μ 将随着辐射的能量(或波长)变化，因为在不同的能量时占主导的相互作用类型不同.

例 题 详 解

光子理论

9.1 求出 1.0keV 光子的波长和频率.

解 ☞

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.4\text{keV}\cdot\text{Å}}{1.0\text{keV}} = 12.4\text{Å}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8\text{m/s}}{12.4\times10^{-10}\text{m}} = 2.42\times10^{17}\text{Hz}$$

9.2 求出 12.0MeV 光子的动量.

解 ☞

$$p = \frac{E}{c} = 12\text{MeV}/c$$

9.3 当一个 20 keV 的电子与一个重核碰撞之后静止下来，求出所产生的光子的频率.

解 ☞ 设电子的全部动能都用于产生光子，我们有

$$E_i = E_f$$

$$K + m_0c^2 = h\nu + m_0c^2$$

$$20\times10^3\text{eV} = (4.136\times10^{-15}\text{eV}\cdot\text{s})\nu$$

$$\nu = 4.84\times10^{18}\text{Hz}$$

9.4 证明在题 9.3 中动量是不守恒的.

证 ☞ 电子的初始动量可按下式求出：

$$(K + E_0)^2 = (p_ec)^2 + E_0^2 \quad \text{或者} \quad (0.02\text{MeV} + 0.511\text{MeV})^2 = (p_ec)^2 + (0.511\text{MeV})^2$$

因而 $p_e = 0.144\text{MeV}/c$. 但是

$$p_f = p_{ph} = \frac{E_{ph}}{c} = \frac{0.02\text{MeV}}{c}$$

这里多余的动量由使电子停下来的核所吸收. 因为核的质量比起电子的要大得多，题 9.3 中的核能量

变化可以略去.

9.5 一个结合能为 15 eV 的分子键被一个光子击开,求出光子的最大波长.

解 ☞ 从 $E=hc/\lambda$,

$$15\text{eV} = \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{\lambda} \quad \text{或} \quad \lambda = 827\text{Å}$$

9.6 如果一个光子的动量与 3MeV 电子的动量相等,这个光子的能量有多大?

解 ☞ 电子的动量和能量有关系

$$E^2 = (p_e c)^2 + E_0^2 \quad \text{或者} \quad (3\text{MeV}+0.511\text{MeV})^2 = (p_e c)^2 + (0.511\text{MeV})^2$$

有 $p_e = 3.47\text{MeV}/c$. 光子的能量是

$$E = pc = p_e c = (3.47\text{MeV}/c)c = 3.47\text{MeV}$$

9.7 波长为 3000Å 的单色光垂直入射到 4cm^2 的表面上. 设光强是 $15\times10^{-2}\text{W/m}^2$,求出光子敲击表面的速率.

解 ☞ 每个光子的能量是

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s})(3\times10^8\text{m/s})}{3\times10^{-7}\text{m}} = 6.63\times10^{-19}\text{J}$$

总能流是

$$IA = (15\times10^{-2}\text{W/m}^2)(4\times10^{-4}\text{m}^2) = 6\times10^{-5}\text{W}$$
$$= 6\times10^{-5}\text{J/s}$$

从而光子敲击表面的速率是

$$\frac{6\times10^{-5}\text{J/s}}{6.63\times10^{-19}\text{J/光子}} = 9.05\times10^{13}\text{ 光子/s}$$

9.8 微波站运行在 103.7MHz 的频率上,功率输出为 200 kW. 计算出该站的量子发送速率.

解 ☞ 每个量子的能量是

$$E = h\nu = (6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s})(103.7\times10^6\text{s}^{-1})$$
$$= 6.88\times10^{-26}\text{J}$$

所以

$$\frac{\text{量子数目}}{\text{时间}} = 200\times10^3\frac{\text{J}}{\text{s}}\times\frac{1\text{ 量子}}{6.88\times10^{-26}\text{J}} = 2.91\times10^{30}\frac{\text{量子}}{\text{s}}$$

光电效应

9.9 考虑一个离 100 瓦灯泡 75cm 远的钾表面. 假定灯泡的能量辐射是其输入功率的 5%. 把每个钾原子当作是直径 1Å 的圆盘. 按照光的波动假说,确定出每个原子吸收到与它的功函数 2.0eV 的能量所需的时间.

解 ☞ 将灯泡当作是点光源,在钾表面的位置上的强度是

$$\text{强度} = \frac{\text{功率}}{\text{球面面积}} = \frac{100\text{W}\times0.05}{4\pi(0.75\text{m})^2} = 0.707\text{W/m}$$

射到每个钾原子上的功率是

$$\text{每个原子上的功率} = \text{强度}\times(\text{每个原子的面积})$$
$$= \left(0.707\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)\frac{\pi(1\times10^{-10}\text{m})^2}{4} = 5.56\times10^{-21}\text{W}$$

因此吸收到 2.0eV 能量所需要的时间长度可按下式确定

$$\text{功率} = \frac{\text{能量}}{\text{时间}} \quad \text{或} \quad \text{时间} = \frac{\text{能量}}{\text{功率}} = \frac{(2.50\text{eV})(1.6\times10^{-19}\text{J/eV})}{5.56\times10^{-21}\text{J/s}}$$
$$= 57.6\text{s}$$

在这里的计算中,假定全部入射能都被吸收. 而按照波动学说,入射能量的相当大的一部分被反射,因此实际计算下来的时间要超过 57.6s. 于是从电磁辐射的波动说中,理论的发射时间比实验上观测到的小于 10^{-9}s 的时间要高很多个数量级.

9.10　在用钙做发射极的光电实验中，找到了下面的截止电位 V_s

λ/Å	2536	3132	3650	4047
ν, Hz×10^{15}	1.18	0.958	0.822	0.741
V_s, V	1.95	0.98	0.50	0.14

从这些数据中求出普朗克常数.

解　☞ 这些数据画在图 9-5. 从光电方程看来，图中的斜率是 h/e，所以

$$h = e(\text{斜率}) = (1.6\times10^{-19}c)\frac{1.66\text{V}}{0.40\times10^{15}\text{s}^{-1}} = 6.6\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$$

(1C·V=1J)

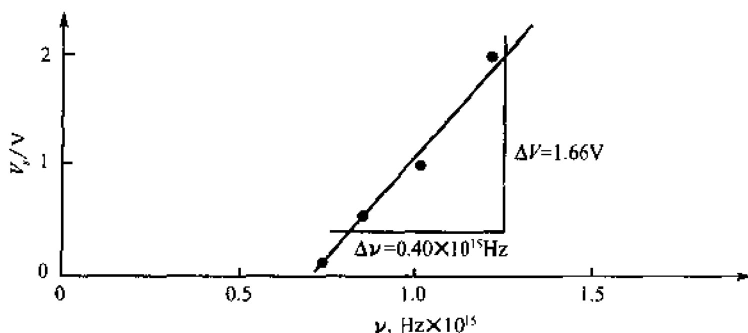


图 9-5

9.11　当波长为 3000Å 的光照到一个表面上，产生的光电子的动能遍及 0 到 4.0×10^{-19}J. 对于此光的截止电压是多少?

解　☞ $K_{max} = 4.0\times10^{-19}\text{J}\times\dfrac{1\text{eV}}{1.6\times10^{-19}\text{J}} = 2.5\text{eV}$

于是，从 $eV_s = K_{max}$，得到 $V_s = 2.5$V.

9.12　在问题 9.11 中的材料的阈波长是多少?

解　☞.　$eV_s = h\nu - eW_0 = \dfrac{hc}{\lambda} - \dfrac{hc}{\lambda_{阈}}$　或者

$$2.5\text{eV} = \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{3000\text{Å}} - \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{\lambda_{阈}}$$

解出 $\lambda_{阈}$ = 7590Å.

9.13　光电管中的发射极的阈波长为 6000Å. 如果射到管中的入射光的截止电压是 2.5V，求出光的波长.

解　☞ 功函数是

$$eW_0 = h\nu_{th} = \frac{h_c}{\lambda_{th}} = \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{6000\text{Å}} = 2.07e$$

由光电方程给出

$$eV_s = h\nu - eW_0 = \frac{hc}{\lambda} - eW_0 \quad 或者$$

$$2.5\text{eV} = \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{\lambda} - 2.07\text{eV}$$

解出 λ = 2713Å

9.14　如果在光电实验中对于钾的电子发送的最大波长是 5620Å，求出它的功函数.

解　☞ $\phi = eW_0 = \dfrac{h_c}{\lambda_{th}} = \dfrac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{5620\text{Å}} = 2.21\text{eV}$

9.15　以波长为 2500Å 的紫外光照向钾极，设钾的功函数是 2.21eV，问所发射的电子的最大

动能是多少?

解 ☞ $K_{max} = h\dfrac{c}{\lambda} - eW_0 = \dfrac{12.4\times10^3 eV\cdot Å}{2500Å} - 2.21eV$

$= 2.75eV$

9.16 在题 9.15 中的紫外光具有强度 $2W/m^2$ 计算单位面积上的电子发射速率.

解 ☞ 在题 9.15 中,每个光子具有能量 $4.96eV = 7.94\times10^{-19}J$. 假定每一个光子释放出一个电子,我们有

$$\frac{电子数}{m^2\cdot s} = \frac{光子数}{m^2\cdot s} = \frac{2J/m^2\cdot s}{7.94\times10^{-19}J/光子}$$

$$= 2.52\times10^{18}\ \frac{光子}{m^2\cdot s}$$

9.17 证明对于自由电子不可能有光电效应.

证 ☞ 参见图 9-6 所示的在质心中的假想过程,在这样的系统中初始动量为零. 从能量守恒,

$$E_i = E_f \quad 或者 \quad h\nu + mc^2 = m_0c^2$$

它表示 $m_0 > m$. 这个条件不能成立,于是过程不能发生. 在光电效应中参与的电子是不自由的,出现的重物体取走动量但吸收的能量可以忽略. 见题 8.16.

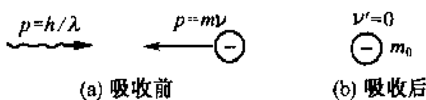


图 9-6

康普顿效应

9.18 一个 0.3MeV X 射线光子与初始静止的电子进行"迎头"碰撞. 利用能量守恒和动量守恒,求出电子的反冲速度.

解 ☞ 在图 9-2 的注记中,能量守恒可以记为

$$E + m_0c^2 = E' + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

或者

$$0.3MeV + 0.511MeV = E' + \frac{0.511MeV}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

光子动量是 $h\nu/c = E/c$,所以由动量守恒推出($\theta = 180°, \phi = 0$)

$$\frac{E}{c} - 0 = -\frac{E'}{c} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \quad 或 \quad \frac{0.3MeV}{c} = \frac{-E'}{c} + \frac{0.511MeV}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

将能量和动量方程联立求解有 $v = 0.65c$

9.19 在题 9.18 中校核速度与康普顿方程所确定的值一致.

解 ☞ $\lambda' - \lambda = \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) = \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos180°) = \dfrac{2h}{m_0c}$

或者 $\lambda' = \lambda + \dfrac{2h}{m_0c}$,将这个结果乘以 $1/hc$,我们得到

$$\frac{\lambda'}{hc} = \frac{\lambda}{hc} + \frac{2}{m_0c^2} = \frac{1}{h\nu} + \frac{2}{m_0c^2} = \frac{1}{0.3MeV} + \frac{2}{0.511MeV}$$

$$= 7.24\ \frac{1}{MeV}$$

将 $E' = (1/7.24)MeV$ 代入题 9.18 的能量方程中并且对 v 求解,我们重新得到 $v = 0.65c$.

9.20 0.400Å 波长的 X 射线对电子进行了 90°的康普顿散射,求出它的波长的相对改变.

解 ☞ $\lambda' - \lambda = \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) = (0.0243Å)(1-\cos90°) = 0.0243Å$

$\dfrac{\lambda'-\lambda}{\lambda} = \dfrac{0.0243Å}{0.400Å} = 0.0608$

9.21 波长为 0.300Å 的 X 射线经历了 60°的康普顿散射. 求出散射光子的波长和散射后电子的能量.

解 ☞ $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) = 0.30Å + (0.0243Å)(1-\cos60°)$

$= 0.312Å$

从能量守恒

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + K_e + m_0c^2 \quad 或 \quad \frac{12.4\text{keV}\cdot Å}{0.3Å} = \frac{12.4\text{keV}\cdot Å}{0.312Å} + K_e$$

解出 $K_e = 1.59\text{keV}$.

9.22 在一个康普顿实验中，能量为 0.500MeV 的 X 射线撞击一个电子后，电子的动能是 0.100MeV. 如果电子初始时静止，求出散射光子的波长.

解 ☞

$$E_{初} = E_{终}$$

$$E + m_0c^2 = E' + (K_e + m_0c^2)$$

$$0.500\text{MeV} = E' + 0.100\text{MeV}$$

$$E' = 0.400\text{MeV}$$

从而

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} = \frac{12.4\times10^{-3}\text{MeV}\cdot Å}{0.400\text{MeV}} = 31\times10^{-3}Å$$

9.23 求出题 9.22 中求出散射光子与入射方向之间的夹角.

解 ☞ 入射波长是

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.4\times10^{-3}\text{MeV}\cdot Å}{0.500\text{MeV}} = 24.8\times10^{-3}Å$$

从康普顿方程，

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

$$31\times10^{-3}Å - 24.8\times10^{-3}Å = (24.3\times10^{-3}Å)(1-\cos\theta)$$

解出，$\theta = 42°$.

9.24 如果在康普顿散射中分给电子的最大能量是 45keV，问入射光子的波长是多少？

解 ☞ 如果电子取得最大的反跳能量，光子必然是反向散射. 由能量守恒，

$$E + m_0c^2 = E' + 45\text{keV} + m_0c^2 \quad 或者 \quad E - E' = 45\text{keV} \tag{1}$$

由动量守恒，

$$\frac{E}{c} = -\frac{E'}{c} + p_e \tag{2}$$

从电子的动量和能量关系 $E_e^2 = (p_ec)^2 + E_0^2$，我们有

$$(0.511\text{MeV} + 0.045\text{MeV})^2 = (p_ec)^2 + (0.511\text{MeV})^2 \quad 或 \ p_e = 0.219\text{MeV}/c$$

将它代入式(2)，有

$$E + E' = 219\text{keV} \tag{3}$$

求解式(1)和(3)，我们得到 $E = 132\text{keV}$，从而

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.4\text{keV}\cdot Å}{132\text{keV}} = 9.39\times10^{-2}Å$$

9.25 证明静止的自由电子不可能吸收一个光子(从而自由电子必然发生康普顿散射.)

证[*] ☞ $p_{ph} = p_e$ 或 $\frac{h\nu}{c} = p_e$

$E_{ph} = E_e$ 或 $h\nu = \sqrt{(p_ec)^2 + (m_0c^2)^2}$

将 c 除能量表达式有

$$\frac{h\nu}{c} = \sqrt{p_e^2 + (m_0c^2)^2} > p_e$$

它与动量表达式相抵触.

---

* 答案照原文翻译，有错. 正确答案见后记. ——译者注

本质上相同的问题在光电效应中以略有不同的形式讨论过(题 9.17).

9.26 在康普顿实验中,当散射光子可以生成正电子-电子对时,其最大的散射角是多少?

解 ☞ 产生正电子-电子对的阈波长有关系(题 9.31)

$$h\frac{c}{\lambda_{th}} = 2m_0c^2 \quad 或者 \quad \frac{h}{m_0c} = 2\lambda_{th}$$

将这个结果代进康普顿方程,我们有

$$\lambda' = \lambda + 2\lambda_{th}(1-\cos\theta)$$

表达式右方是两个正量的和.从而,如果

$$2\lambda_{th}(1-\cos\theta) \geqslant \lambda_{th}$$

则 $\lambda' > \lambda_{th}$,而对产生不能出现.利用这个关系,我们求得最大的散射角(阈散射角)θ_{th}.

$$2\lambda_{th}(1-\cos\theta_{th}) = \lambda_{th} \quad 或 \quad \cos\theta_{th} = \frac{1}{2} \quad 或 \quad \theta_{th} = 60°$$

注意这个结果与入射光子能量无关.

9.27 导出康普顿方程 $\lambda' - \lambda = \left(\frac{h}{m_0c}\right)(1-\cos\theta)$

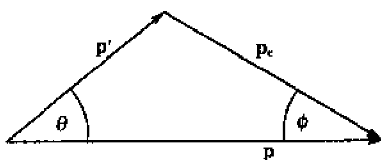


图 9-7

解 ☞ 参照图 9-7.光子当作是能量 $E = h\nu = hc/\lambda$ 和动量 $p = h/\lambda$ 的粒子.从能量守恒定律:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2$$

先移项使 mc^2 单独位于左侧,而其余各项都移到右侧,然后平方并且重新排列,有

$$(mc^2)^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2}(\lambda^2+\lambda'^2) - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{2hm_0c^3}{\lambda\lambda'}(\lambda-\lambda') + (m_0c^2)^2 \qquad (1)$$

从动量守恒,我们得到图 9-7 的矢量图.因为 $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$

$$\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_e = p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' = \frac{h^2}{\lambda^2\lambda'^2}(\lambda'^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda'\cos\theta) \qquad (2)$$

将式(1)和(2)代进关系 $(mc^2)^2 = (p_ec)^2 + (m_0c^2)^2$,我们得到

$$\frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2}(\lambda^2+\lambda'^2) - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{2hm_0c^3}{\lambda\lambda'}(\lambda'-\lambda) + (m_0c^2)^2$$

$$= \frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2}(\lambda'^2+\lambda^2-2\lambda\lambda'\cos\theta) + (m_0c^2)^2$$

解出,我们得到康普顿关系

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

对产生和对湮没

9.28 在重核附近一个波长为 0.0030Å 的光子生成电子-正电子对,设正电子的动能是电子的动能的两倍,求出每一个粒子的动能.

解 ☞ 从 $E_i = E_f$,

$$\frac{hc}{\lambda} = 2m_0c^2 + K_+ + K_- = 2m_0c^2 + 3K_-$$

$$\frac{12.4\times10^{-3}\text{MeV}\cdot\text{Å}}{0.0030\text{Å}} = 2(0.511\text{MeV}) + 3K_-$$

$$K_- = 1.04\text{MeV}$$

以及 $K_+ = 2K_- = 2.08$MeV.

9.29 当原始静止的一个电子和正电子湮没时,求出所产生的两个光子的能量.

解 ☞ 因为正电子-电子对的初始动量是零,两个光子必然在相反的方向以相等的能量传播.应用能量守恒得到

$$2m_0c^2 = 2E_\gamma \quad 或者 \quad E_\gamma = m_0c^2 = 0.511\text{MeV}$$

9.30 当电子和正电子迎头碰撞，生成两个 2.0MeV 的光子，它们以相反方向传播．求出碰撞前电子和正电子动能．

解 ☞ 因为光子的最终总动量为零，电子和正电子在碰撞前必然有相等的动能．从能量守恒，

$$2m_0c^2 + 2K = 2E_\gamma$$
$$2(0.511\text{MeV}) + 2K = 2(2.0\text{MeV})$$
$$K = 1.49\text{MeV}$$

9.31 确定对产生的阈波长．

解 ☞ 阈波长是指所产生的正电子和电子有零动量的相应波长．这种情况的能量守恒给出（略去核子的反冲能量）

$$\frac{hc}{\lambda_{th}} = 2m_0c^2 \quad 或者 \quad \lambda_{th} = \frac{hc}{2m_0c^2} = \frac{12.4\times10^{-3}\text{MeV}\cdot\text{Å}}{2(0.511\text{MeV})} = 0.0121\text{Å}$$

9.32 静止的电子和正电子湮没后产生三个光子．如果有两个光子的能量分别为 0.20MeV 和 0.30MeV，求出第三个光子的能量．

解 ☞ 由能量守恒，

$$2(0.511\text{MeV}) = 0.20\text{MeV} + 0.30\text{MeV} + E_3 \quad 或$$
$$E_3 = 0.522\text{MeV}$$

9.33 200MeV 的光子可以产生多少个正电子？

解 ☞ 生成一对静止的电子-正电子对所需要的能量是两倍的电子静能，即 1.02MeV．于是

$$最大的正电子数 = (200\text{MeV})\left(\frac{1\,对}{1.022\text{MeV}}\right)\left(1\,\frac{正电子}{对}\right) = 195\,个正电子$$

9.34 一个 5MeV 的电子与一个静止的正电子湮没生成两个光子．一个光子沿入射电子的方向运动．计算各个光子的能量．

解 ☞ 由于横轴方向动量守恒，第二个光子必须与第一个光子同向（$\varepsilon = +1$）或者反向（$\varepsilon = -1$）运动．从动量守恒

$$p_- = \frac{E_1}{c} + \varepsilon\frac{E_2}{c} \quad 或 \quad E_1 + \varepsilon E_2 = p_-c$$

将它置换

$$(K_- + m_0c^2)^2 = (p_-c)^2 + (m_0c^2)^2$$

中的 p_-c，我们得到

$$E_1 + \varepsilon E_2 = \sqrt{(K_- + m_0c^2)^2 - (m_0c^2)^2}$$
$$= \sqrt{(5.511\text{MeV})^2 - (0.511\text{MeV})^2} = 6.62\text{Me}$$

能量守恒要求

$$E_1 + E_2 = K + m_0c^2 + m_0c^2 = 5\text{MeV} + 2(0.511\text{MeV})$$
$$= 6.02\text{MeV}$$

消去动量方程中的 E_1，给出

$$-0.53\text{MeV} = (\varepsilon - 1)E_2$$

于是 ε 必须等于 -1，所以第二个光子的传播方向与第一个相反．于是找到能量

$$E_2 = 0.27\text{MeV}, E_1 = 5.75\text{MeV}$$

9.35 电子和正电子同时传播如图 9-8 所示，并且湮没．如所产生的两个光子沿着原始对的运动路线运动．求出它们的波长．

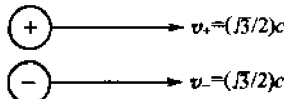


图 9-8

解 ☞ 如果在质心系中看待这个过程，光子在相反方向运动．将这些结果转换回实验室系，因为实验室相对于质心的速度小于 c，我们必然找到这两个光子依然在相反方向运动．由动量守恒给出

$$2mv = p_1 - p_2 = \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2}$$

其中

$$2mv = \frac{2(m_0c^2)(v/c)}{c\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2(0.511\text{MeV})(\sqrt{3}/2)}{c\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}} = 1.770\,\frac{\text{MeV}}{c}$$

于是

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{(2mv)c}{hc} = \frac{1.770\text{MeV}}{12.4\times10^{-3}\text{MeV}\cdot\text{Å}} = 142.7\text{Å}^{-1} \tag{1}$$

由能量守恒

$$2mc^2 = h\nu_1 + h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2}$$

其中

$$2mc^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2(0.511\text{MeV})}{\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}} = 2.044\text{MeV}$$

于是

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2mc^2}{hc} = \frac{2.044\text{MeV}}{12.4\times10^{-3}\text{MeV}\cdot\text{Å}} = 164.8\text{Å}^{-1}$$

将式(1)和(2)联立求解,我们得到

$$\lambda_1 = 6.50\times10^{-3}\text{Å},\quad \lambda_2 = 9.05\times10^{-2}\text{Å}$$

9.36 一个电子和正电子如同题9.35中那样运动并湮没,观察到所产生的光子的两个散射角相等.求出光子的能量和散射角.

解 ☞ 因为横向的初始动量为零,光子一定具有相等的能量 E_γ.由于能量守恒和题9.35的结果,

$$2E_\gamma = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = 2.044\text{MeV}\quad\text{或}\quad E_\gamma = 1.022\text{MeV}$$

由于在纵向方向上的动量守恒,

$$2mv = \frac{E_\gamma}{c}\cos\theta + \frac{E_\gamma}{c}\cos(-\theta)$$

$$\frac{2m_0v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2m_0c}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\cos\theta$$

因而 $\cos\theta = v/c = \sqrt{3}/2$ 和 $\theta = 30°$.

9.37 对产生发生在磁场为0.1T的磁场中,其结果是正电子和电子分别有120mm和40mm的曲率半径.求出入射光子的能量.

解 ☞ 对在磁场中的带电粒子应用牛顿第二定律(见题8.25),我们得到

$$quB = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\frac{u^2}{R}\quad\text{或者}\quad \frac{1}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = \sqrt{1+\left(\frac{qBR}{m_0c}\right)^2}$$

于是带电粒子的总能量是

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = m_0c^2\sqrt{1+\left(\frac{qBR}{m_0c}\right)^2}$$

求出正电子和电子的能量:

$$E_+ = (0.511\text{MeV})\sqrt{1+\left[\frac{(1.6\times10^{-19}\text{c})(0.1\text{T})(120\times10^{-3}\text{m})}{(9.11\times10^{-31}\text{kg})(3\times10^8\text{m/s})}\right]^2}$$
$$= 3.63\text{MeV}$$

$$E_- = (0.511\text{MeV})\sqrt{1+\left[\frac{(1.6\times10^{-19}\text{c})(0.1\text{T})(40\times10^{-3}\text{m})}{(9.11\times10^{-31}\text{kg})(3\times10^8\text{m/s})}\right]^2}$$
$$= 1.30\text{MeV}$$

于是,由于能量守恒(重核的能量可略去),

$$h\nu = E_+ + E_- = 4.93\text{MeV}$$

9.38 证明对产生过程不能在真空中出现.(从而为了实现对产生必然有一个核.)

证 ☞ 粒子对的产生是不变事件,如果一个观察者看到对已经产生,那么其他任何相对于他的观察者也会看到对产生.但由于多普勒频移(第7章),从一个观察者到另一个观察者光子的频率要变化.可以找出一个具有某个速率的观察者在他看来一个给定的光子经多普勒频移后的频率低于对产生所需要的阈频率(题9.31).对于这个观察者来说在真空中的对产生是不可能的,所以对其余的观察者看来在真空中产生一对粒子也是不可能的.

光子的吸收

9.39 当材料的线性吸收系数是 0.07mm^{-1},X光通过其中 5.0mm 之后还有百分之几?

解 ☞ $\frac{I}{I_0}=e^{-\mu x}=e^{-(0.07\text{mm}^{-1})(5.0\text{mm})}$

$=0.705=70.5\%$

9.40 一束单色光射到一吸收材料上,如果经过 8mm 材料后,入射光强降到原来的一半,材料的吸收系数是多少?

解 ☞ $\frac{I_0}{2}=I_0e^{-\mu(8\text{mm})}$

解出 $\mu=0.0866\text{mm}^{-1}$.

9.41 如果铝的 $\mu=0.070\text{mm}^{-1}$,求出它的半数值厚度.

解 ☞ 半数值厚度是经过这样厚的材料之后入射光束的强度降到原来的一半.于是

$$\frac{1}{2}=e^{-(0.070\text{mm}^{-1})x}\quad 或\quad x=9.9\text{mm}$$

9.42 如果光束通过材料中的长度等于它的半值厚度的两倍,问通过以后的光强与原始光强之比是什么?

解 ☞ 通过每个半值厚度之后,其光强为它的原始值的一半.所以通过两个半值厚度之后,原始光强(I_0)将缩小为原始的 1/4($I_0/4$).

9.43 多厚的铝*($\mu_{Al}=0.044\text{mm}^{-1}$)等效于 6mm 的铅($\mu_{pb}=5.8\text{mm}^{-1}$)?

解 ☞ 等效厚度的铝所削弱的入射辐射强度其效果应当与通过 6.0mm 铅的情况相同

$$\frac{I}{I_0}=e^{-\mu_{pb}x_{pb}}=e^{-\mu_{Al}x_{Al}}$$

从这里有 $\mu_{pb}x_{pb}=\mu_{Al}x_{Al}$.于是

$$x_{Al}=\frac{\mu_{pb}}{\mu_{Al}}\cdot x_{pb}=\frac{5.8\text{mm}^{-1}}{0.044\text{mm}^{-1}}(6.0\text{mm})=791\text{mm}$$

9.44 材料 A 的吸收系数为 0.044mm^{-1} 而材料 B 的吸收系数为 0.056mm^{-1}.如果入射光强是 I_0,最终的光强是 $I_0/5$.设光束通过这两种材料,其中 A 的厚度是 B 的厚度的两倍.计算 A 和 B 的厚度.

解 ☞ 如果 A 的厚度是 $2x$,入射到 B 的强度是 $I_0e^{-\mu_a(2x)}$.于是对 B 应用指数衰减规律,

$$I=\frac{I_0}{5}=[I_0e^{-\mu_a(2x)}]e^{-\mu_bx}=I_0e^{-(2\mu_a+\mu_b)x}$$

或者

$$5=e^{(0.144\text{mm}^{-1})x}$$

解出,$x=11.18\text{mm}$,$2x=22.36\text{mm}$.

9.45 导出公式 $I=I_0e^{-\mu x}$.

解 ☞ 对于给定能量的光子来说,在材料中光子流的衰减是因为光电效应,对产生和康普顿效应的某种联合作用.在厚度 dx 上的个数或反应数 dN 直接与光子流的大小 N 以及光子通过一薄层材料所碰到的原子数成正比.注意在 dx 中的原子数正比于 dx.因此

* 原文中 $\mu_{Al}=0.44\text{mm}^{-1}$,今据解答更改.——译者注

$$-dN = \mu N dx$$

将它积分我们得到

$$\int_{n}^{N_0}\frac{dN}{N} = -\mu\int_0^x dx$$

$$N = N_0 e^{-\mu x}$$

但单色光的强度 I 正比于 N. 从而

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

补 充 习 题

光子理论

9.46　求出 1MeV 光子的波长和频率.

答案：1.24×10^{-2}A　2.42×10^{20}Hz

9.47　光子的动量为 0.02MeV/c，求出它的波长和频率.

答案：6.20×10^{-1}Å；4.84×10^{18}Hz

9.48　求出 4keV 光子的动量.

答案：4keV/c

9.49　求出动量为 10MeV/c 光子的能量.

答案：10MeV

9.50　求出波长是 4000Å 的光子的能量.

答案：3.1eV

9.51　求出频率为 10^6Hz 光子的能量和动量.

答案：4.14×10^{-9}eV；4.14×10^{-9}MeV/c

9.52　求出波长是 10Å 的光子的动量.

答案：1.24keV/c

9.53　一个 1MeV 电子趋于停止并且放出一个光子. 求出这个光子的波长.

答案：12.4×10^{-3}Å

9.54　如果分解一个双原子分子需要的光子的最大波长是 3000Å，分子的结合能是多少?

答案：4.13eV

9.55　如果光子的能量与 10MeV 的 α 粒子的能量相同，它的动量是多少?

答案：10MeV/c

9.56　一个微波站在 101.1MHz 上有 150kW 功率输出. 设微波站的辐射是各向同性的，求出离微波站的一英里远处单位时间单位横断面上的光子数.

答案：6.39×10^{21}光子/($\mathrm{ft}^2\cdot\mathrm{s}$)

9.57　300MHz 平面电磁波垂直射到面积为 $50\mathrm{cm}^2$ 的表面上. 如果波的强度是 $9\times10^{-5}\mathrm{W/m}^2$，求出光子轰击表面的速率.

答案：2.56×10^{18}光子/s

9.58　频率 6×10^{14}Hz 的光源产生 10W 功率，问在 1 秒钟内产生多少光子?

答案：2.52×10^{19}光子

9.59　参照题 9.8，将微波站看作是点源，辐射各向同性. 现有边长为 20cm 的立方形状的收音机设置在离点源 15km 处，求出在收音机内的光子数.

答案：2.75×10^{10}光子

光电效应

9.60　对于某个材料的光电阈波长是 5000Å. 求出其功函数.

答案：2.48eV

9.61　对于题 9.5 中的材料，相对于 3500Å 光子的截止电势是多少?

答案：1.06V

9.62 当材料用 3000Å 光照射时,发射电子的最大能量是 1.2eV.求出它的功函数.

答案:2.93eV

9.63 在题 9.62 中设光强为 $3W/m^2$.如果 50% 照射有效,每 m^2 上的电子发射率是多少?

答案:2.27×10^8 电子/$(s\cdot m^2)$

9.64 当用 4000Å 的光照射阈波长为 6000Å 的表面时,求出表面发射出来的电子的最大动能.

答案:1.03eV

9.65 求出能使功函数为 3.0eV 的材料发射光电子的最大波长.

答案:4133Å

9.66 当波长 5000Å 的光照到锂(功函数=2.13eV)上,求出释放出的最快的电子的能量.

答案:0.35eV

9.67 当一个波长为 4500Å 的光照到一个表面上,得到发射电子的截止电位是 0.75V.如果现在有波长 3000Å 照到这个表面上,这时光电子的截止电压是多少?

答案:2.13V

9.68 由 3500Å 所照的表面上放出的最大能量的电子在 1.5×10^{-5}T 的磁场中弯曲成半径为 18cm 的圆周.求出这个材料的功函数.

答案:2.90eV

9.69 波长 4500Å 的光照射到光电管上.第一管的发射极的阈波长是 6000Å,而第二管中发射极的功函数是第一管中的两倍.求出这两个管各自的截止电压.

答案:$V_{s1}=0.69V$;第二管中没有光电发射.

9.70 设波长 600Å 的光子为氢原子,离解能为 13.6eV,所吸收.射出的电子的动能是多少?

答案:7.1eV

9.71 在波长为 4000Å 的光照到钡发射极上,钡的功函数为 2.5eV.希望将全部光电子都在半径 20 cm 的圆周内运动,求出所需要的横向磁场.

答案:1.32×10^{-5}T

9.72 设在光电实验中入射光的波长从 3000Å 增加 3010Å,求出对应的截止电压的改变.

答案:−0.0138V

康普顿效应

9.73 求出质子(静止质量=938.3MeV)的康普顿波长.

答案:1.32×10^{-5}Å

9.74 当可见光波长为 5000Å 时,重复题 9.20.

答案:4.86×10^{-6}

9.75 一个 100keV 的光子从初始是静止的自由电子上散射.如果光子的散射角是 180°,求出电子的反冲速度.(利用能量和动量守恒.)

答案:0.319c

9.76 在题 9.75 中用康普顿方程计算出散射光的波长.

答案:0.1726Å

9.77 设在题 9.75 中的光子以相对于入射光束以 65°角度散射,求出散射后的波长.

答案:0.138Å

9.78 从题 9.77,计算散射后电子的动量.

答案:102.4keV/c

9.79 重复题 9.77 和 9.78,当散射角 144°时.

答案:0.168Å,166keV/c

9.80 在康普顿散射中,测量散射光子和电子.得到电子有动能 75keV,光子有 200keV 能量.光子的初始波长是多少?

答案:0.045Å

9.81 从题 9.80,求出光子和电子的散射角.

答案:72.5°;41.7°

9.82 当一个波长 0.15Å 的光子经历了对电子的 120°散射,计算光子的波长变化的百分比.

答案:24.3%

9.83　有一个原始能量为12MeV的光子在自由质子上进行了90°角的康普顿散射,求出散射后光子的波长.(对于质子,$m_0c^2=938.3\text{MeV}$.)

答案:1.05×10^{-3}Å

9.84　设在康普顿实验中入射量子是波长0.50Å的X射线,计算传递给电子的最大能量,用电子伏(eV)单位.

答案:4.7eV

9.85　对于波长为5000Å的可见光,重复题9.84.

答案:2.41×10^{-5}eV

9.86　在康普顿散射中光子的散射角和电子的散射角之间有什么关系?

答案:$\cot\phi=\left(1-\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)\cot\frac{\theta}{2}$

9.87　一个电子在与一个X射线光子"迎头"碰撞之后具有70kV的截止电压.如果电子初始处于静止状态,问初始的和散射后的X射线光子的波长各是多少?

答案:0.0716Å;0.1201Å

对产生和对湮没

9.88　确定对产生的光子阈能.

答案:1.022MeV

9.89　一个0.0005Å光子在重核附近生成电子-正电子对.如两粒子有相同的动能,求出各个粒子的能量.

答案:11.9MeV

9.90　在题9.89中,如果正电子的动能是电子动能的5倍,求出各个粒子的能量.

答案:19.8MeV;3.96MeV

9.91　在对湮没后看到两个1MeV光子在相反方向运动.如果电子和正电子有同样大小的动能,求出它们的值.

答案:0.49MeV

9.92　求出质子-反质子产生的阈波长.质子(或反质子)的静止质量是938MeV.

答案:6.61×10^{-6}Å

9.93　速度$0.8c$的电子与静止的正电子湮没,生成两个光子.看到一个光子沿着入射电子方向传播.求出每个光子的能量.

答案:1.02MeV;0.34MeV

9.94　如果在题9.93中看到的光子垂直于入射电子运动方向,求出每一个光子的能量.

答案:0.51MeV;0.85MeV

9.95　对产生发生在0.05T的磁场中,并且看到电子和正电子两者都有90mm的曲率半径.求出入射光子的能量.

答案:2.88MeV

光子的吸收

9.96　某物质的吸收系数是0.061mm^{-1}.设入射强度是I_0.问将光束降到$I_0/3$所需要的物质的厚度.

答案:18 mm

9.97　对于某物质的线性吸收系数是0.055mm^{-1}.一单色光束通过该物质10 mm后将留下百分之几.

答案:57.7%

9.98　单色光通过某物质8.5mm之后减弱到原来的1/3.求出线性吸收系数.

答案:0.129mm^{-1}

9.99　对于某物质$\mu=0.035\text{mm}^{-1}$.求出其半值厚度.答案:19.8mm

9.100　物质$A(\mu_a=0.060\text{mm}^{-1})$需要多厚才等价于8mm的物质$B(\mu_b=0.131\text{mm}^{-1})$?

答案:17.5mm

9.101　将题9.100中两种材料以相同厚度重叠在一起并且把入射单色光束削弱到原来的1/5;求出厚度.

答案:8.4mm

9.102　两束相等强度的辐射:0.3ÅX 射线($\mu_a=0.3\text{mm}^{-1}$)和 0.5ÅX 射线($\mu_b=0.72\text{mm}^{-1}$)射到同一个材料上,如果在射出辐射上 0.3Å 的 X 射线强度是 0.5ÅX 射线强度的两倍,求出材料的厚度.

答案:1.7mm

9.103　一光束垂直通过 20mm 薄片并且衰减成原来强度的一半.现在将薄片转过 40°角放置.求出现在透过薄片后的束流强度.

答案:$I_1/I_0=0.404$

第10章　物　质　波

10.1　德布罗意波

在第9章我们看到，为了解释某些实验结果例如光电效应和康普顿散射，必须给电磁辐射以粒子性质.从干涉和衍射实验知道电磁辐射也是波.从而电磁辐射显示了波粒二象性，在某些情况下它像波，在另一些场合它像粒子.

因为这里只有两种能量传递模型，重要的是了解在波和粒子之间的区别.在经典粒子方面有位置，动量，动能，质量和电荷.另一方面，经典波中有波长，频率，速度，扰动的幅度，强度，能量和动量.两者之间的最显著的差异是粒子可以局域化，而波铺展开来并且占有相对大的空间部分.

在1924，L.德布罗意建议，如果电磁辐射某些时候像波而另一些时候像粒子，于是极可能物体，例如电子，某些时候像波一样地作用.换句话说，德布罗意建议：如果物体通过一个其宽度可与物体所联系的波长相比较的狭缝它将会衍射，正像光子的单狭缝实验一样.

对于光子 $\nu=E/h$，$\lambda=h/p$.从这里可以看到等式的左方是光子的波方面(频率，波长)，面在右方是光子的粒子方面(能量，动量).这两方面的桥梁是普朗克常数.考虑到对称性，德布罗意认为与物体相联系的波长要满足对于光子适用的同样的关系.他因此指出了物体有波长，其关系是

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}$$

在光子和有质量物体之间的一个重要的区别是波性和粒子性之间的关系.因为对于光子 $\lambda\nu=c$，从光子的能量和动量等粒子性质得到波长和频率只需要一个规则.另一方面，有质量物体对于它的波长($\lambda=h/p$)和频率($\nu=E/h$)要求各自的规则.

10.2　德布罗意假设的实验验证

在1912年M.劳厄建议，因为原子的正规排列，晶体可以当作X射线的衍射光栅使用.X射线是1Å波长左右的电磁波，其长短与典型晶体中原子间空隙大小同数量级.

X射线的衍射理论由威廉H.布拉格爵士在1913年提出.布拉格指出，如图10-1所示，晶体中的原子平面，称为布拉格平面，如同平面镜反射光线那样，它以严格相同的方式反射辐射.

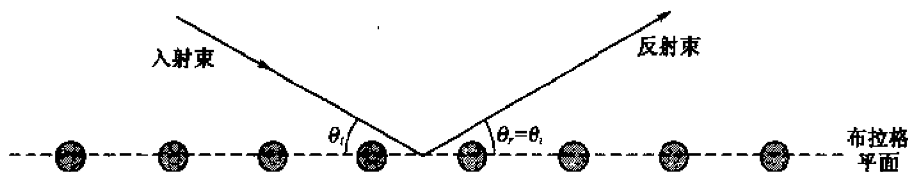


图10-1

如果考虑到有一系列平行的、间隔为 d 的布拉格平面反射辐射，从图10-2看到，从每个平面反射过来的光束构成干涉而生成加强的全反射光束.构成干涉的条件是两束射线之间的路程差，$AB=2d\sin\theta$，等于波长的整数倍，于是给出布拉格定律，

$$n\lambda=2d\sin\theta$$

如果 n 和 d 已知，入射束的波长可以由测量在透射束和反射束之间的散射角而确定.

在任何晶体中，各种不同的布拉格平面族，每一个都有自身的间隔，可以通过在晶体中取

不同方式的截面生成.这些族的每一个都可有衍射.因此,如果 X 射线束通过随机定向的晶体,例如粉末样本或者金属箔,将放在样品后面的薄膜上看到同心圆的衍射图形.一个给定的圆周对应着由特殊平面族给出的特别顺序的衍射.对于主布拉格平面,其距离是原子间距离.

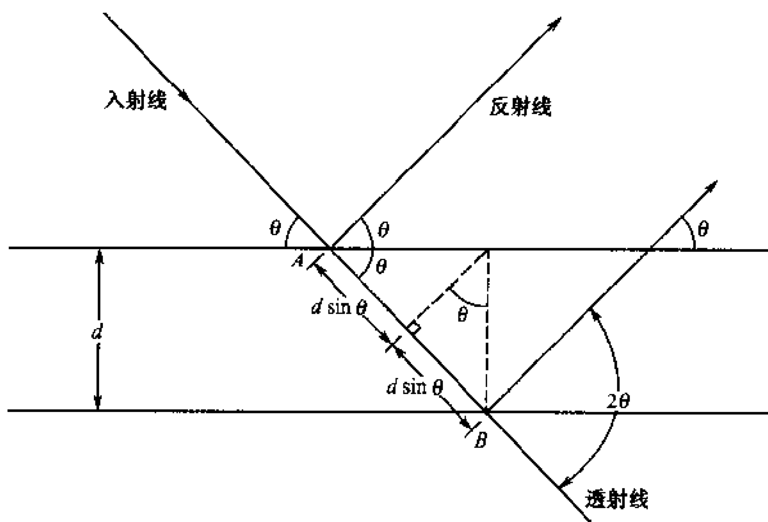


图 10-2

观察由德布罗意指出的电子衍射的第一个实验由 C.J.戴维逊和 L.H.革末在贝尔电话实验室做出.他们射出一束 54eV 电子到镍单晶上,它的原子间隔由 X 射线衍射测定是 2.15Å,他们确定了散射电子的强度作为散射角的函数.如果没有衍射效应,人们期望看到散射电子的强度将随散射角单调递减,在任何角度都是不大的部分.实际出现的是,找到了在 50°散射角理论上指出的电子强度尖峰值.经过小的修正(见题 10.16 和 10.17),所计算的波长与德布罗意波长一致,从而证实了德布罗意假设.

在戴维逊和革末的实验之后不久,P.汤姆孙在 1927 年研究电子对金属箔的穿透.如果电子像粒子,透射束将形成一个黑点.实际上,汤姆孙找到了圆形衍射图形,这件事只能在波动的观点上阐明,这进一步确认了德布罗意假设.

接着,热(低能)中子衍射实验也做出来了,这进一步支持了德布罗意假设.

10.3　德布罗意波的概率解释

当一个有质量的物体,例如电子,显示了波性时,一个重要的概念是什么,是"波动".精心设计的概率解释多半还是令人困扰的,事实上到今天还是有疑问的.但是,使用这样的解释,可以阐明许多其他的未曾阐明的实验结果.

考虑光在双狭缝实验得到的干涉图形.按照波性,在屏上一点的强度 I(单位面积单位时间能量)是

$$I = \varepsilon_0 c \mathscr{E}^2$$

这里 $\mathscr{E}$ 是在指定点的电场值,ε_0 是真空介电常数而 c 是光速.

用光子图像,另外,在屏上一点的强度是

$$I = h\nu N$$

这里 $h\nu$ 是单个光子的能量而 N 是流向屏上指定点的光子流(单位面积单位时间上的光子数).

这里对于某个单独的光于打到屏上并且产生一个闪烁的过程是不能预断的.但是,最终的图形由交替的亮、黑条纹组成,任何单个的光子到达亮条纹的概率很高,而到黑条纹的概率为零.在屏上一点的光子流 N 因此是在该点附近找到一个光子的概率的测度.

因为 $I = \epsilon_0 c \mathscr{E}^2 = h\nu N$，有 $N \propto \mathscr{E}^2$. 从而，在电磁辐射的量子解释中，其中交变的量，即电场 $\mathscr{E}$，是这样的一种函数，它的平方给出在给定地点找到光子的概率.

这里对光所描述的干涉花样可以用物质波代替光波生成. 这时基于光的波粒二象性上的概率解释可以直接用来阐明物体的波粒二象性. 于是，以德布罗意波长 $\lambda = h/mv$ 交变的电子波是波函数，波函数的平方给出在指定地点找到一个电子的概率. 为了协调物体的波和粒子图像，我们必须放弃单个物质粒子的位置可以严格确定的概念. 代替的是我们只能讲在指定时间在指定位置上找到一个粒子的概率，如同在题 10.19 中的例子那样.

通常以 ψ 标记波函数. 对于光子，由 ψ 所标记的德布罗意波是电磁波；对于电子或其他物体，ψ 是非电磁的德布罗意波.

10.4　海森伯测不准原理

设要测定一个物体(例如一个电子)的位置. 为了测量物体的位置必须进行某种类型的实验. 例如，一个已知能量的物体平行于 y 轴运动，一个狭缝设立在这个假想路线上，如图 10-3. 如果粒子在位于狭缝后面的屏上留下印记，我们就知道物体通过了狭缝. 于是粒子的 x 位置在它钻进狭缝时(以及钻进狭缝之前)有个不确定性 Δx，$\Delta x = d$. 狭缝宽度越小，物体的 x 位置的不确定性就越小，从而测定的位置就越准确.

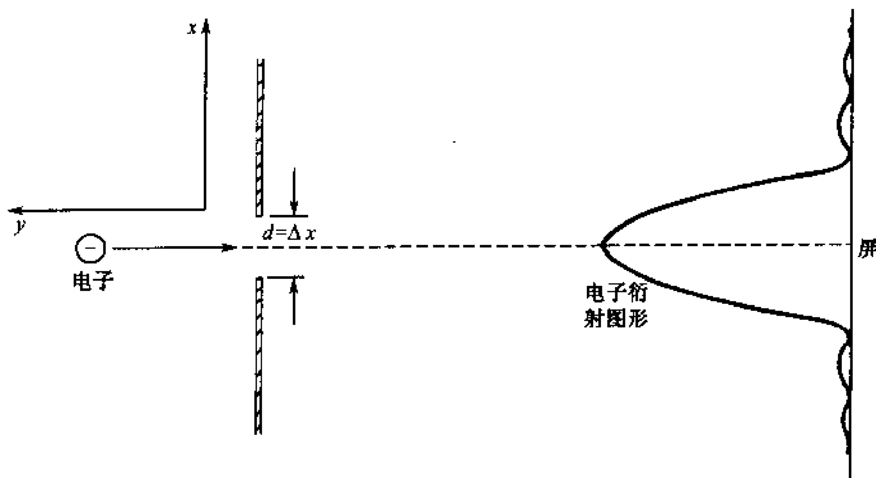


图 10-3

因为物体的波性，粒子通过狭缝将衍射. 但是，即使这样，一直到你知道它通过狭缝打到屏上某点之前，你甚至不知道将打到屏上什么地点.

但衍射过程对粒子的动量有影响. 在粒子通过狭缝前，其位置是完全未知的，但是知道动量的大小(因为粒子有固定能量)及方向(与狭缝正交的方向). 当粒子通过狭缝，从而确定了位置，但动量的 x 分量 p_x 不再是零，因为这个粒子可以向着衍射屏上的任意点运动. 由于在粒子触屏之前不会知道它究竟射向何处，所在狭缝上时其动量的 x 分量对应有不确定性 Δp_x.

一个分析(题 10.31)指出，随着狭缝宽度 d 的增加，不确定性 Δp_x 可以小到任意指定值. 但如果狭缝宽度增加，粒子位置的不确定性也增加!

从而可以看到，在同一个实验中，粒子的 x 位置和 x 动量的不确定性，两者不能同时达到任意小；增加其中一个量的精确性只能在放松另一个量的精确性的条件下得到.

这个例子是 W. 海森伯在 1927 年首先提出的海森伯测不准原理的一个例证. 用量子力学分析证明，对于任何类型的实验，不确定量 Δx 和 Δp_x 满足关系

$$\Delta p_x \Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

海森伯测不准关系也可以用另一些共轭变量形成. 例如，为了测量物体的能量 E，必须在

某个时间范围 Δt 内作一个实验. 一个分析, 能量的不确定性 ΔE, 与测定能量所用的时间 Δt 有关系

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

于是, 仅仅在无穷长时间($\Delta t = \infty$)作测量时, 物体的能量才会是完全精确的($\Delta E = 0$).

对于原子激发态系统, 其平均有限存活时间称为平均寿命 τ, 海森伯对它有重要的推论. 因为平均寿命限制了测量系统衰变前的能量的时间, 这些系统在能量上必然有自然的最小的测不准量 $\Delta E = h/(4\pi\tau)$.

测不准原理指出在单个实验中要测量一对共轭变数(例如 p_x 和 x, E 和 t)到任意精度是不可能的. 作为一个结论, 物体的粒子和波方面不可能在同样的实验中测量. 例如, 设一个实验是设计来测定物体的粒子性质的. 于是在这个实验中 Δx 和 Δt 必须是零, 因为按照定义, 在任何指定的时间粒子都应当有精确的位置; 但动量和能量属于波的方面($\lambda = h/p$, $\nu = E/h$), 因此按照测不准原理, 它们是完全未知的. 于是当物体的粒子方面显示出来, 波的方面必然被压抑. 同样, 如果测量了波的方面, $\Delta\lambda$ 和 $\Delta\nu$ 以及 Δp 和 ΔE 从而是零, 而粒子方面将是不可观察的.

不可能同时观察物体的波和粒子方面是在 1928 年由玻尔提出的互补原理的一个例证. 因为波和粒子两种图像是完全了解物体性质所必须的, 但两个方面不能同时观察, 这两者互补.

例题详解

德布罗意波

10.1 一个小球 0.01 kg 速度为 10m/s, 求它的德布罗意波长.

解 ☞ $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{0.01\,\text{kg} \times 10\,\text{m/s}} = 6.63 \times 10^{-33}\,\text{m}$

$= 6.63 \times 10^{-23}\,\text{Å}$

为了观察德布罗意波, 必须利用与德布罗意波长可比较的器件进行干涉或衍射实验. 上面的德布罗意波长 10^{-23}Å 其阶或大小比任何现存的器件都要小很多.

10.2 求出能使电子得到德布罗意波长 1Å 的加速电势, 1Å 是晶体中原子间的距离的大小.

解 ☞ 从(非相对论计算的)能量守恒, 我们有

$$eV = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2m_0}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$

$$V = \frac{h^2}{2m_0 e\lambda^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(1 \times 10^{-10}\,\text{m})}$$

$$= 151\,\text{V}$$

注意到 151eV 的动能与 0.511MeV 相比是小量, 因此用非相对论计算是可行的.

10.3 计算 0.05eV("热")中子的德布罗意波长.

解 ☞ 做非相对论计算

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K}} = \frac{hc}{\sqrt{(2m_0c^2)K}}$$

$$= \frac{12.4 \times 10^3\,\text{eV}\cdot\text{Å}}{\sqrt{2(940 \times 10^6\,\text{eV})(0.05\,\text{eV})}} = 1.28\,\text{Å}$$

在慢中子物理中取 1Å 数量级的合理波长是合适的.

10.4 计算波长为 1fm($1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m} = 10^{-5}\,\text{Å} = 1\,\text{fermi}$)的质子的能量.

解 ☞ 从 $\lambda = h/p = hc/pc$

$$0.5\,\text{fm} = \frac{1240\,\text{MeV}\cdot\text{fm}}{pc} \quad 或 \quad pc = 2480\,\text{MeV}$$

于是相对论能量-动量关系,

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 = (2480\text{MeV})^2 + (938\text{MeV})^2$$

得到 $E = 2650\text{MeV}$ 并且

$$K = E - E_0 = 2650\text{MeV} - 938\text{MeV} = 1712\text{MeV}$$

本处 $K \sim E_0$，需要用相对论计算.

10.5 如果我们想观察 2.5Å 大小的物体，可供利用的最小能量光子是多大?

解 ☞ 为了散射能够发生，波的波长要与所观察的目标的尺寸同阶或较小(就像豌豆散射水波). 于是在本问题中我们可以利用的最大波长是 $\lambda_{\max} = 2.5\text{Å}$. 对应的最小能量为

$$E_{\min} = h\nu_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{eV} \cdot \text{Å}}{2.5\text{Å}}$$

$$= 4.96 \times 10^3 \text{eV}$$

10.6 重复题 10.5，但光子用电子代替.

解 ☞ 如同题 10.5，最大的电子波长是 $\lambda_{\max} = 2.5\text{Å}$. 在非相对论中，动能和动量的关系是 $p = \sqrt{2m_0 K}$. 从而

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K}}$$

和

$$K_{\min} = \frac{h^2}{2m_0 \lambda_{\max}} = \frac{(hc)^2}{2(m_0 c^2)\lambda_{\max}}$$

$$= \frac{(12.4 \times 10^3 \text{eV} \cdot \text{Å})^2}{2(0.511 \times 10^6 \text{eV})(2.5\text{Å})^2} = 24.1\text{eV}$$

与题 10.5 相比较知道，当能量相同时，电子比光子的分辨率要高得多. 这说明了为什么电子显微镜的放大倍数要比光学显微镜的高得多.

10.7 当粒子的能量比它的静能大很多时，证明粒子的德布罗意波长与同样能量的光子波长近似相等.

解 ☞ 如果 $E \gg E_0$

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad 或者 \quad p = \frac{E}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \approx \frac{E}{c}$$

所以

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{E}$$

对于一个光子，$E = h\nu = hc/\lambda_\gamma$ 于是

$$\lambda_\gamma = \frac{hc}{E} \approx \lambda$$

10.8 确定德布罗意波长 $\lambda = h/p = h/mv$ 所对应的波的相速度.

解 ☞ 德布罗意频率是

$$E = mc^2 = h\nu \quad 或者 \quad \nu = mc^2/h$$

相速度 u_p 为

$$u_p = \nu\lambda = \left(\frac{mc^2}{h}\right)\left(\frac{h}{mv}\right) = \frac{c^2}{v}$$

注意因为 $v < c$, $v_p > c$.

10.9 确定对应于德布罗意波长 $\lambda = h/p$ 的波的群速度.

解 ☞ 群速度 u_g 由关系 $u_g = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}(\lambda^{-1})$ 给出，利用题 10.8 中给出的 ν 的关系式，我们有

$$u_g = \frac{\mathrm{d}(mc^2/h)}{\mathrm{d}(p/h)} = \frac{c^2 \mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$$

微分等式 $m^2c^4 = c^2p^2 + m_0^2c^4$，我们得到 $c^2 m\,\mathrm{d}m = p\,\mathrm{d}p$. 于是

$$u_g = \frac{(p/m)\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p} = \frac{p}{m} = v$$

在量子力学的理论构造上，一个粒子由与它相连系的波包描述，波包由无穷多平面波叠加而成. 每个

平面波以相速度运动,如题 10.8 中所示相速度可能大于光速.但各自的相速度是不可观察的.可观察的量是局部扰动的速度或群速度,刚才已经提到,它等于通常相连系的粒子的速度,小于光速.

德布罗意假设的实验验证

10.10 一个 0.083eV 的中子束从一个未知样品上散射,观察到一个布拉格反射尖峰,其中心在 22°.相应的布拉格平面间的距离是多少?

解 ☞ 中子束波长是

$$\lambda = h/p = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}} = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0c^2)K}}$$

$$= \frac{12.40\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{\sqrt{2(940\times10^6\text{eV})(0.083\text{eV})}} = 0.993\text{Å}$$

设尖峰对应于 1 级衍射($n=1$),我们有

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{0.993\text{Å}}{2\sin22°} = 1.33\text{Å}$$

10.11 热中子入射到氯化钠晶体上(原子间距离 2.81Å),在 20°角处有主布拉格平面的 1 级辐射.问热中子的能量是多少?

解 ☞ 对于 1 级布拉格反射

$$\lambda = 2d\sin\theta = 2(2.81\text{Å})\sin20° = 1.922\text{Å}$$

从德布罗意关系,$\lambda = h/p = hc/\sqrt{2(m_0c^2)K}$,所以

$$1.922\text{Å} = \frac{12.40\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{\sqrt{2(940\times10^6\text{eV})K}} \quad 或 \quad K = 0.0221\text{eV}$$

10.12 一个窄的 66keV 电子束通过银的多晶箔.银晶体的原子间距是 4.08Å.计算设置于箔后 40cm 处的屏上出现的关于主布拉格平面的 1 级衍射图形的半径.

解 ☞ 电子束的德布罗意波长是

$$\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - E_0^2}} = \frac{hc}{\sqrt{(K+E_0)^2 - E_0^2}}$$

$$= \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{\sqrt{(60\times10^3\text{eV}+511\times10^3\text{eV})^2-(511\times10^3\text{eV})^2}} = 0.0487\text{Å}$$

对于 1 级布拉格反射

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0.0487\text{Å}}{4(4.08\text{Å})}$$

从这里求得 $\theta = 0.342°$.从图 10-4,1 级衍射图形的半径是

$$R = D\tan2\theta = (40\text{cm})\tan0.684° = 0.478\text{cm}$$

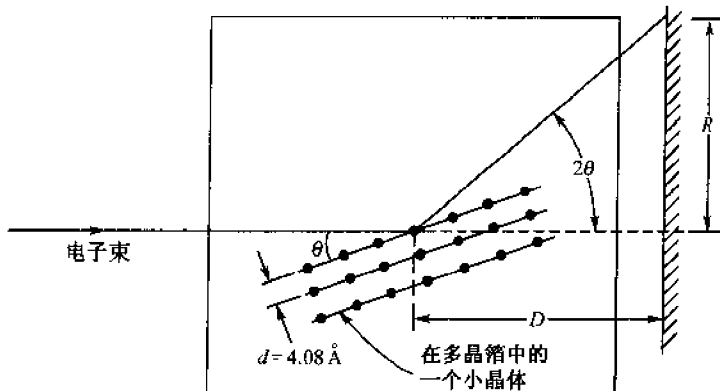


图 10-4

10.13 晶体材料有一系列相隔1.1Å的布拉格平面.对于2eV中子来说其最高阶的布拉格反射是什么?

解 ☞ 中子的波长是

$$\lambda=\frac{h}{m_0 c}=\frac{h}{\sqrt{2m_0K}}=\frac{hc}{\sqrt{(2m_0c^2)K}}$$

$$=\frac{12.40\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{\sqrt{2(940\times10^6\text{eV})(2\text{eV})}}=0.202\text{Å}$$

可以得到的最大角度是90°.于是,从布拉格定律,

$$2(1.1\text{Å})\sin90^\circ=n(0.202\text{Å})\quad 或\quad n=10.89$$

因为 n 必须是整数,其最高阶是 $n=10$.

10.14 一块大晶体将从反应堆出来的中子流分出单能中子.晶体的布拉格平面间隔是1.1Å 如果布拉格角设为30°,从这个角度看到的1级反射的中子能量是多少?

解 ☞ $\lambda=2d\sin\theta=2(1.1\text{Å})\sin30^\circ=1.1\text{Å}$

由中子的波长与动能的关系

$$\lambda=\frac{h}{m_0 v}=\frac{hc}{\sqrt{2(m_0c^2)K}}\quad 或\quad K=\frac{(hc)^2}{2(m_0c^2)\lambda^2}$$

$$=\frac{(12.40\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å})^2}{2(940\times10^6\text{eV})(1.1\text{Å})^2}=0.0676\text{eV}$$

10.15 已知NaCl的密度是 $2.16\times10^3\text{kg/m}^3$ 并且钠和氯的原子量分别是23.00和35.46.求出NaCl晶体的原子间距.

解 ☞ Nacl的分子量是23.00+35.46−58.46.每58.46kg NaCl的分子数是

$$\frac{1\text{kmol}}{58.46\text{kg}}\times6.025\times10^{26}\frac{分子数}{\text{kmol}}=\frac{6.025\times10^{26}分子数}{58.46\text{kg}}$$

因为本处每个分子有两个原子,我们有

$$\frac{原子数}{体积}=\frac{原子数}{质量}\times\frac{质量}{体积}=\frac{2\times6.025\times10^{26}原子}{58.46\text{kg}}\times2.16\times10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$=4.45\times10^{28}\frac{原子}{\text{m}^3}$$

为了将它与原子间距 d 联系起来,考虑图10-5所示的NaCl单元(略去 Na^+ 和 Cl^- 离子之间的差异.单元立方体积是 $(2d)^3$.这个单元中的离子是:8个位于顶点的离子,每个为8个单元所共有;12个边上的离子,每一个为4个单元所共有;6个面上离子,每一个为两个单元所共有;和1个单独的中心离子.于是

$$离子数=8\left(\frac{1}{8}\right)+12\left(\frac{1}{4}\right)+6\left(\frac{1}{2}\right)+1=8$$

并且

$$\frac{离子数}{体积}=\frac{8}{(2d)^3}=\frac{1}{d^3}$$

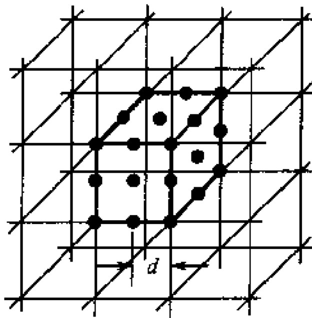


图10-5

将它与上述结果相等,我们有

$$\frac{1}{d^3}=4.45\times10^{28}\text{m}^{-3}$$

或者

$$d=2.82\times10^{-10}\text{m}=2.82\text{Å}$$

10.16 戴维逊和革末在他们的一个实验中,将电子垂直入射到与主布拉格平面平行而切割出来的表面上.他们在沿表面法线50°角处观察到构造性干涉.求出联系于电子束的波长.(镍的原子间距离是2.15Å.)

解 ☞ 我们首先求出相对于法线的散射角 ϕ 和原子间距离 D 之间的关系.从图10-6看到 $\theta+$

$\phi/2=90°$,所以

$$\sin\theta = \cos\frac{\phi}{2}$$

又从图上我们看到布拉格平面的距离 d 是

$$d = D\sin\frac{\phi}{2}$$

将这些结果代入布拉格关系:$2d\sin\theta=n\lambda$,其中并且利用半角公式

$$2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} = \sin\phi$$

我们得到

$$D\sin\phi = n\lambda$$

取 $n=1$,我们于是有

$$(2.15Å)\sin 50.0° = (1)\lambda \quad 或 \quad \lambda = 1.65Å$$

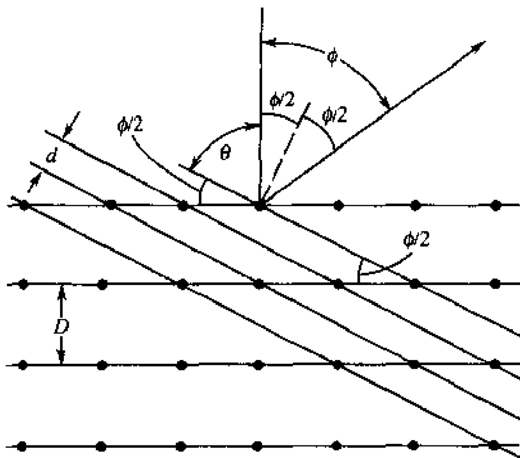


图 10-6

10.17 在题 10.16 所描述的实验中,戴维逊和革末利用了 54.0eV 的电子.求出镍单晶的有效加速电势.

解 ☞ 54eV 电子的德布罗意波长是

$$\lambda_d = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K}} = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0c^2)K}}$$

$$= \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot Å}{\sqrt{2(0.511\times10^6\text{eV})(54\text{eV})}} = 1.67Å$$

它与所观察的 1.65Å 波长不同.对应于 $\lambda=1.65Å$ 的动能是

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0c^2)K'}} \quad 或者 \quad K' = \frac{(hc)^2}{2(m_0c^2)\lambda^2}$$

$$= \frac{(12.4\times10^3\text{eV}\cdot Å)^2}{2(0.511\times10^6\text{eV})(1.65Å)^2} = 55.3\text{eV}$$

于是,镍晶体的有效加速位势是

$$V_e = 55.3\text{V} - 54.0\text{V} = 1.3\text{V}$$

德布罗意波的概率解释

10.18 已知波长 3000Å 而强度为 $3\times10^{-14}\text{W/m}^2$ 的单色光光束,将它折算成光子流.

解 ☞ $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s})(3\times10^8\text{m/s})}{3\times10^{-7}\text{m}}$

$=6.63\times10^{-19}$J/光子

$$N = \frac{I}{h\nu} = \frac{3\times10^{-14}\text{J/s}\cdot\text{m}^2}{6.63\times10^{-19}\text{J/光子}} = 4.5\times10^4\ \frac{光子}{\text{s}\cdot\text{m}^2}$$

$$=4.5\ \frac{\text{光子}}{\text{s}\cdot\text{cm}^2}$$

在1s时间平均有4.5个光子射到1cm^2面积(例如说照相胶片)上.当然,只有光子的总数是可以观察的.于是在,对于给定的1cm^2面积,我们在1秒钟范围内可以看到3个光子或5个光子,但决不会看到4.5个光子.仅仅是在取很多时间区间的平均值其平均数才趋向于4.5个光子.又,对于给定的1秒区间,可能在固定的1cm^2之内成团.在长时间后,光子的位置才趋向于均匀分布.

10.19 设想用$h=6.625\times10^{-3}\text{J}\cdot\text{s}$来代替$6.625\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$.质量为66.25克的球以速度5m/s的速率通过两个高、窄而隔开0.6m的平行窗户扔进一个房间.在每一投掷之中随意挑选一个窗户作为目标.求出在窗子后面12m处墙壁上所形成的痕迹条纹之间的距离.

解 ☞ 球的德布罗意波是

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6.625\times10^{-3}\text{J}\cdot\text{s}}{(6.625\times10^{-2}\text{kg})(5\text{m/s})}=0.02\text{m}$$

从干涉理论,双狭缝干涉图形中的零强度线所对应的角度θ_n由下述关系给出

$$d\sin\theta_n=\frac{2n+1}{2}\lambda,\quad n=0,1,2,\cdots$$

对应的y距离由图10-7按关系

$$y_n=L\tan\theta_n\approx L\sin\theta_n=L\,\frac{2n+1}{2}\,\frac{\lambda}{d}$$

相继两个条纹之间的距离因此是

$$\begin{aligned}\Delta y&=y_{n+1}-y_n\\&=\frac{L\lambda}{2d}\{[2(n+1)+1]-(2n+1)\}\\&=\frac{L\lambda}{d}\end{aligned}$$

代进题中所给出的数值,我们有

$$\Delta y=\frac{(12\text{m})(0.02\text{m})}{0.6\text{m}}=0.4\text{m}$$

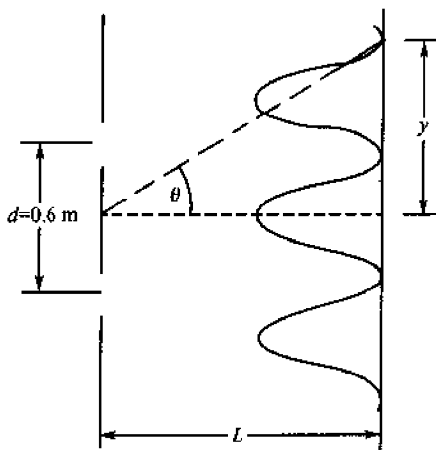


图 10-7

这个问题是德布罗意波概率解释的一个模型.任何单个球必将击中墙壁上一个肯定的,虽然是未能预定的是位置.虽然不能预断一个球将撞向什么地点,但每个球撞到干涉图形最大值处有高的概率,而到最小值处为零概率.

实验上由计算撞到墙壁的每一部分的球数而确定实际的干涉图形.在实验开始时球击在壁上或多或少有些不规则形式.只有在大量的球投进窗户之后才使干涉图样清晰起来,因为在最终的极大处的击中数将会增加,而在极小处的击中数仍旧是零.

10.20 一个质量为m的粒子限制在一维的长度为L的直线上运动.基于物体的波解释的讨论,证明粒子的能量只有离散的数值,并请求出这些数值.

解 ☞ 设粒子限制在$x=0$到$x=L$的线段上,在这个范围之外找到粒子的概率必为零.因此波函数ψ在$x\leqslant0$或$x\geqslant L$处必然为零,这是由于ψ的平方给出在某个地点找到粒子的概率.在限制区域内部,ψ的波长必须能够保证在边界$x=0$和$x=L$上ψ为零,使得它能连续变化到外部区域.从而仅有这样的波长才是可能的,对于它们来说,半波长的某个整数倍刚好与$x=0$到$x=L$相重,即$L=n\lambda/2$,这里n是一个整数,称为量子数,具有数值$n=1,2,3,\cdots$.从德布罗意关系$\lambda=h/p$,我们得到粒子的动量只有离散值

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{nh}{2L}$$

因为这个粒子在区间内部未受到任何作用力,其位能是个常数,可以把它选作是零.于是物体的能量完全是动能,并且具离散值,其关系如下

$$E=K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}=\frac{(nh/2L)^2}{2m}$$

即

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

这个非常简单的问题表明了物体的概率解释的基本性质之一,即束缚系统的能量只能取离散值,而零能量并不是一个可能的值.

海森伯测不准关系

10.21 设某个粒子的动量可以测到4分之一的精度.当粒子是(a)5×10^{-3}kg质量的物体而以速率2m/s运动(b)一个电子以速率1.8×10^8m/s运动,求出粒子在这两种情况下的最小测不准量.

解 ☞ $\frac{\Delta p}{p}=10^{-3}$ 或者 $\Delta p=10^{-3}p=10^{-3}mv$,于是,从$\Delta x\Delta p\geqslant h/4\pi$,

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{h}{4\pi 10^{-3}mv} \tag{1}$$

(a)

$$\Delta x \geqslant \frac{6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{4\pi10^{-3}(5\times10^{-3}\text{kg})(2\text{m/s})} = 5.28\times10^{-30}\text{m} = 5.28\times10^{-20}\text{Å}$$

这里的最小测不准量是5.28×10^{-28}Å,这是显然不能测出的量.

(b)电子的相对论质量,$m=m_0\sqrt{1-(v^2/c^2)}$,应当在式(1)中使用

$$\Delta x \geqslant \frac{h\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{4\pi10^{-3}m_0v} = \frac{(6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s})\sqrt{1-(0.6)^2}}{4\pi10^{-3}(9.11\times10^{-31}\text{kg})(1.8\times10^8\text{m/s})} = 2.57\times10^{-10}\text{m} = 2.57\text{Å}$$

这里最小测不准量是2.57Å

10.22 如果3000Å波长的光子在波长上有百万分之一的精度,光子的位置测不准量是什么?

解 ☞ 光子的动量是

$$p = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{12.40\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{(3\times10^3\text{Å})c} = 4.13\,\frac{\text{eV}}{c}$$

光子动量的测不准量(只讨论大小)是

$$\Delta p = \left|-\frac{h}{\lambda^2}\right|\Delta\lambda = p\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = p\times10^{-6} = 4.13\times10^{-6}\,\frac{\text{eV}}{c}$$

从此,

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{hc}{4\pi c\Delta p} = \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{4\pi c(4.13\times10^{-6}\text{eV}/c)} = 239\times10^6\text{Å} = 23.9\text{mm}$$

10.23 如果电子在一个原子的能量态中停留了10^{-8}s,该能量态的最小测不准量是什么?

解 ☞ 可用测量能量的时间是10^{-8}s.于是,从$\Delta E\Delta t\geqslant h/4\pi$,

$$\Delta E \geqslant \frac{h}{4\pi\Delta t} = \frac{hc}{4\pi c\Delta t} = \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{4\pi(3\times10^8\text{m/s})(10^{-8}\text{s})(10^{10}\text{Å/m})} = 0.329\times10^{-7}\text{eV}$$

一个态的能量的最小测不准量$\Gamma=h/(4\pi\tau)$称为是态的自然宽度,这里τ是该激发态的平均寿命.本问题中平均寿命是10^{-8}s,而自然宽度是0.329×10^{-7}eV.

10.24 波长4000Å的频谱线宽度经测得是10^{-4}Å.原子系统停留在相应能量态的平均时间是多少?

解 ☞ 从问题10.23,$\tau=h/(4\pi\Gamma)$,这里$\Gamma=\Delta E$是对应着$\Delta\lambda=10^{-4}$Å的能量偏差.从$E=hc/\lambda$

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

并且

$$\tau = \frac{h}{4\pi\left(\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda\right)} = \frac{\lambda^2}{4\pi c\Delta\lambda} = \frac{(4\times10^{-7}\text{m})^2}{4\pi(3\times10^8\text{m/s})(10^{-14}\text{m})}$$

$$= 4.24\times10^{-9}\text{s}$$

注意最后的表达式中不出现普朗克常数.

10.25 设粒子动量的测不准量等于粒子的动量.粒子位置的最小测不准量用它的德布罗意波长表示是多少?

解 ☞ 已知 $\Delta p = p$,所以

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{h}{4\pi p} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

因为粒子的德布罗意波长是 $\lambda = h/p$.于是位置的最小测不准量是 $\lambda/4\pi$.

10.26 从关系 $\Delta p\Delta x \geqslant h/4\pi$ 证明对于在圆周上运动的粒子有 $\Delta L\Delta\theta \geqslant h/4\pi$,这里量 ΔL 是动量矩的测不准量而 $\Delta\theta$ 是角度的测不准量.

解 ☞ 因为粒子在圆周上运动,测不准原理在圆周的切向适用.于是

$$\Delta p_s\Delta s \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

这里 s 是指沿着圆周测量.角动量与线动量的关系是

$$L = mvR = p_sR$$

于是 $\Delta p_s = \Delta L/R$.角位移与弧长的关系是 $\theta = s/R$;因而 $\Delta s = R\Delta\theta$,得到

$$\Delta p_s\Delta s = (\Delta L/R)(R\Delta\theta) = \Delta L\Delta\theta \geqslant h/4\pi$$

对于有确定的角动量的态(例如在玻尔轨道上的电子,将在第 11 章讨论),角动量的测不准量 ΔL 是零,于是在角位置上的测不准量 $\Delta\theta$ 是无穷大,所以在这轨道中的粒子位置是不确定的.

10.27 如果我们假定在直线上运动的粒子有 $E = \frac{1}{2}mv^2$,证明 $\Delta E\Delta t \geqslant h/4\pi$,这里 $\Delta t = \Delta x/v$.

解 ☞

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

取这个表达式双方的微分,我们有

$$\Delta E = \frac{p\Delta p}{m} = \frac{mv\Delta p}{m} = v\Delta p$$

于是从 $\Delta p\Delta x \geqslant h/4\pi$,

$$\frac{\Delta E}{v}\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi} \quad 或者 \quad \Delta E\Delta t \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

10.28 一个质量为 m 的粒子约束在长度为 L 的线段上.从基于测不准原理的讨论,估计物体可能具有的最小能量值.

解 ☞ 因为粒子必须在给定的区间,位置上的测不准量 Δx 不可能大于 L.如果设 Δx 等于 L,测不准关系 $\Delta x\Delta p_x \geqslant h/4\pi$ 要求动量有测不准量 $\Delta p_x \geqslant h/4\pi L$.现在我们寻找最小的可能能量值,由于 $K = p_x^2/2m$,相当于找最小的可能的 $|p_x|$.我们认为 $|p_x|$ 的测不准量与 p_x 的相同,并且假设测不准区间对 $|p_x|$ 是对称的.于是(见图 10-8)

$$|p_x| = \frac{1}{2}\Delta|p_x| \geqslant 0 \quad 或 \quad |p_x| \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{h}{4\pi L}\right) = \frac{h}{8\pi L}$$

于是 p_x 的最小动量是 $h/8\pi L$,并且

$$K_{\min} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{8\pi L}\right)^2 = \frac{h^2}{128\pi^2 mL^2}$$

与题 10.20 的数值

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

相比较,我们这里粗略的讨论所得的数值已是相当地好.这个结果进一步证明,按照测不准原理,束缚态不可能有零能量.

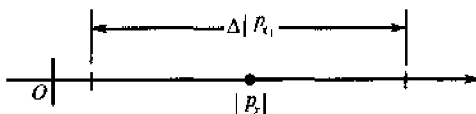


图 10-8

10.29 计算在直径 10^{-14}m 核内的中子的最小动能.

解 ☞ 情况如题10.28,而 L 是核的直径.于是

$$K_{\min}=\frac{1}{2m}\left(\frac{h}{8\pi L}\right)^2=\frac{1}{2(mc^2)}\left(\frac{hc}{8\pi L}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2(940\text{MeV})}\left[\frac{12.4\times10^{-3}\text{MeV}\cdot\text{Å}}{8\pi(10^{-4}\text{Å})}\right]^2=0.013\text{MeV}$$

10.30 如果一个电子处于题10.29的核中,它的最小动能是多少?

解 ☞ 对于电子,要作相对论计算.如同题10.28,最小的动量绝对值是

$$|p|_{\min}=\frac{h}{8\pi L}=\frac{h}{8\pi(10^{-4}\text{Å})}$$

于是

$$(K_{\min}+E_0)^2=(|p|_{\min}c)^2+E_0^2$$

$$(K_{\min}+0.511\text{MeV})^2=\left[\frac{12.4\times10^{-3}\text{MeV}\cdot\text{Å}}{8\pi(10^{-4}\text{Å})}\right]^2+(0.511\text{MeV})^2$$

解出 $K_{\min}=4.45$MeV.

在第一次观察到电子从核中射出时(β 衰变)曾经认为电子必然存在于核中.但发射出的电子的能量往往是几百个 keV 而不是上述计算指出的最小量 4MeV.因此断定电子不是核的组成成分.(还见题17.1.)

10.31 粒子的位置由让它通过一个宽度 d 的狭缝而确定.求出对应的粒子动量中的测不准量.

解 ☞ 当波长 λ 的单色波通过宽度为 d 的狭缝时,将在图10-9所示的屏上生成一个衍射图形.由衍射理论可知:第一个零强度点的位置是 $\sin\alpha=\lambda/d$.

因为它的相关联的德布罗意波,其波长是 $\lambda=h/p$,当粒子通过狭缝时会衍射,从而在 x 方向上将获得某些未知的动量.虽然不能确切知道粒子将击向屏上何处,但最可能击中的地点是在衍射花纹的中心范围之内.于是我们可以合理地认为粒子动量的 x 分量的大小在0到 $p\sin\alpha$ 之间,即

$$\Delta p_x=p\sin\alpha=\frac{h}{\lambda}\frac{\lambda}{d}=\frac{h}{d}$$

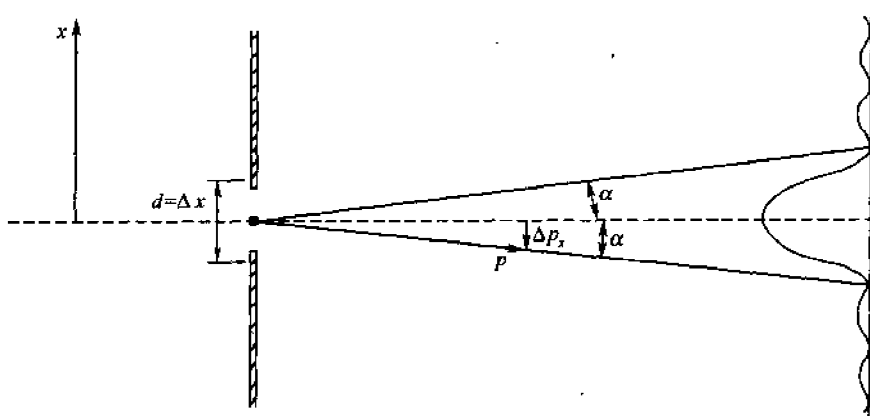


图10-9

随着 d 的增加,测不准量可以任意地小.但是,因为 $d=\Delta x$,是粒子的 x 坐标的测不准量,我们看到

$$\Delta p_x\Delta x=h$$

与海森伯的测不准原理一致.

10.32 希望用显微镜观察一个电子而测定它的位置和动量.详细分析观察过程证明可得到与测不准原理一致的结果.

解 ☞ 在观察过程中当光从电子散射时.我们企图要测量的电子的动量要受到影响,因为入射光

本身带有动量.于是,我们考虑这个实验用最少的光,少到用单个的光子.

当光从粒子上反射回来通过显微镜的物镜时,在眼睛(或照相胶片)位置产生衍射图形.子是观察到的是"模糊的"图形而不是在通常的由多光子组成的正规强度的光所照出的明锐的点.光的衍射理论指出,衍射图形的中心圆盘直径可近似地记为

$$d = \frac{\lambda}{\sin\alpha}$$

这里 λ 是光的波长,而 2α 是物镜下粒子对向的夹角,如图10-10所示.当在我们的实验中看到单个光子,在一定程度上可以认为它到达了衍射图形的中心部分.因而电子位置上的测不准量是

$$\Delta x = d = \frac{\lambda}{\sin\alpha}$$

只要所用的波长足够地小,位置的测不准量也随之小到任意指定的程度.

在散射过程中,一部分光子的动量传给了电子.如果散射光子的动量是精确已知的,这样回过头去确定电子的原始动量是怎样受影响的就成为相对容易的事.但是我们知道进入物镜的散射光子其动量的 x 分量大小可取0到 $p\sin\alpha$,这里 $p = h/\lambda$ 是光子的动量.从而,在我们最终测定电子的动量时,它的 x 分量是不确定的,

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda}\sin\alpha$$

我们可以把 Δp_x 压到任意小的程度,只需将 λ 选得足够地大,但这时 Δx 会相应地变大.将这两个测不准量相乘,我们有

$$\Delta x \Delta p_x = h$$

与海森伯测不准关系一致.

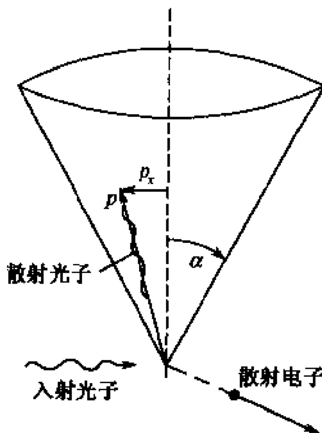


图10-10

补充习题

德布罗意波

10.33 计算速度为25m/s的2kg物体的德布罗意波.

答案:1.33×10^{-25}Å

10.34 计算0.08eV中子的德布罗意波长.

答案:1.01Å

10.35 计算德布罗意波长为0.7Å的中子的动能.

答案:0.167eV

10.36 对于观察5Å目标需要的最小能量电子是什么?

答案:6.02eV

10.37 对于题10.36中的物体,可供利用的最小能量质子是什么?

答案:3.28×10^{-3}eV

10.38 一个质子通过1kV电势从0开始加速.求出它的德布罗意波长.

答案:9.05×10^{-3}Å

10.39 求出1keV的 α 粒子($m_0 = 3728$MeV)的德布罗意波长.

答案:4.54×10^{-3}Å

10.40 用非相对论计算质子的德布罗意波长而误差为5%,质子的动能是多少?

答案:192MeV

10.41 粒子的康普顿波长和它的德布罗意波长的比值是多少?

答案:$\frac{\lambda_c}{\lambda_d} = \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1}$

10.42 用非相对论计算电子的德布罗意波长而误差保持为5%,问电子的能量是多少?

答案:0.015MeV

德布罗意假设的实验验证

10.43 在某种晶体中核之间的距离是 1.2Å. 动能为 0.020eV 的中子在多大的角度上出现 1 级布拉格反射?

答案:57.4°

10.44 0.1eV 中子束从未知样品上散射. 如果 1 级布拉格散射出现在 28°处, 布拉格平面的距离是多少?

答案:0.963Å

10.45 热中子射到原子间距是 1.8Å 的晶体上. 如果从主布拉格平面上的 1 级布拉格反射出现在 22°处, 热中子的动能是多少?

答案:4.5×10^{-2}eV

10.46 对于题 10.11 中的晶体, 如果在 30°处观察到 2 级布拉格反射, 问热中子的质量是多少?

答案:4.14×10^{-2}eV

10.47 参照题 10.12, 确定从主布拉格平面的 2 级衍射图形的半径.

答案:9.6mm

10.48 动能为 0.020eV 的中子束射到 KCl 粉末上. KCl 的格点距离是 3.14Å. 从间隔 3.14Å 的布拉格平面上的 1 级反射到设置在目标后 5cm 处的平照相底板上形成一个圆周, 这个圆周的半径是多少?

答案:3.85cm

10.49 参照题 10.48. 从同一个布拉格平面的 2 级反射圆周的半径是多少?

答案:28.9cm

德布罗意波的概率解释

10.50 重复题 10.18, 现在 $\lambda=4000$Å 而强度为 $5\times10^{-15}\mathrm{W/m^2}$.

答案:1×10^4 光子/$(\mathrm{s\cdot m^2})$

10.51 参照题 10.20. 假设粒子是电子, 局限在长度为 5Å(这是原子的大小)的线段上. 求出它的最低能量.

答案:1.5eV

10.52 参照题 10.20. 设粒子是一个小的但是宏观的物体, 质量为 0.1 mg, 限制在长度 $L=0.1$mm的线段上. 确定它的最低能量.

答案:3.43×10^{-34}eV

海森堡测不准关系

10.53 设 2×10^{-4}kg 物体的速度的 x 分量测量到的精度是 $\pm10^{-6}$m/s. 当我们在 x 轴上确定它的地点时, 精度极限是多少?

答案:1.32×10^{-25}m

10.54 对于一个电子重复题 10.53.

答案:29.0m

10.55 对于加玛射线光子, 波长是 10^{-5}Å, 重复题 10.22.

答案:0.796Å

10.56 如果一个激发态的平均存在时间是 10^{-11}s, 它的能量的最小测不准量是多少?

答案:3.29×10^{-5}eV

10.57 参照题 10.23. 如果从题的能态到基态的转换相应于 3.39eV 的差值, 确定射出的光子的波长的最小测不准量.

答案:3.55×10^{-5}Å

10.58 如果系统的激发态的能量宽度为 1.1eV, 此态的平均寿命是多少?

答案:2.99×10^{-16}s

10.59 如果题 10.58 中的态具有激发能量 1.6keV. 当此激发态衰变时所放在的光子的波长的最小测不准量是多少?

10.60 如果核态能量的最小测不准量是 33keV, 它的平均寿命是多少?

答案:9.97×10^{-21}s

10.61 如果光子波长的测不准量是百万分之一. 设光子波长是(a)3000Å(b)0.9Å 和(c)2×10^{-4}Å, 求出它的

位置测不准量的最小值.

答案:(a)2.39cm;(b)3.98×10^4Å;(c)15.9Å

10.62　设物体的长度为0.5Å,能够观察到该物体的光子的最长波长是多少?

答案:0.5Å

10.63　对于题10.62中的物体,可以用来对它测量的电子的最小能量是多少?

答案:602eV

10.64　对于题10.62中的物体,可以用来对它测量的最小能量质子是什么?

答案:0.328eV

10.65　如果一个光子在题10.29的核中,其最小能量是什么?

答案:$\frac{hc}{8\pi d}=4.9\text{MeV}$

第Ⅲ部分　类氢原子

第11章　玻尔原子

11.1　氢光谱

在19世纪末很多实验工作用来分析气体放电时产生的离散光谱.最轻和最简单的原子是氢,它由一个核和一个电子组成.大概不算奇怪,非常精密的分光镜测量证明,比起其他元素来,氢原子具有最简单的光谱.找出可见光与非可见光范围内的各条谱线排成不同的序列.令人迷惑的是,所有这些原子氢的波长满足一个简单的经验关系——里德伯公式:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right),\quad R=1.0967758\times10^{-3}\text{Å}^{-1}$$

这里　$n_l=1$ 和 $n_u=2,3,4,\cdots$ 是莱曼系(紫外范围)

$n_l=2$ 和 $n_u=3,4,5,\cdots$ 是巴尔末系(可见光范围)

$n_l=3$ 和 $n_u=4,5,6,\cdots$ 是帕邢系(红外范围)

$n_l=4$ 和 $n_u=5,6,7,\cdots$ 是布拉开系(远红外范围)

还有更多的系列处于更远的红外范围.

11.2　氢原子的玻尔理论

在1913年,N.玻尔提出了氢原子的物理理论,可从理论中导出里德伯公式.玻尔的氢原子模型基于行星图景,其中轻的带负电电子围绕着重的带正电核运动.维持电子在轨道上的力是库仑力:

$$F=k\frac{Ze^2}{r^2},\qquad k=9.0\times10^9\quad \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$$

对于氢 $Z=1$.玻尔假定电子的轨道是圆周,一个直接的经典计算(题11.14)得出了它的轨道速度和轨道半径之间有关系

$$v^2=\frac{kZe^2}{mr}\tag{11.1}$$

这里 m 是电子的质量,而电子的总能量(动能+位能)是

$$E=-\frac{kZe^2}{2r}\tag{11.2}$$

现在指出玻尔模型和经典图像的根本区别.当电子在其轨道上运动,线动量为 mv,与它相联系的德布罗意波长是 $\lambda=h/mv$.现在一个波能与一个给定的圆形轨道相联系必须要求轨道的圆周长是波长的整数倍,所以

$$n\lambda=\frac{nh}{mv}=2\pi r\quad 或者\quad L=mvr=n\frac{h}{2\pi}\tag{11.3}$$

这里 $n=1,2,3,\cdots$.量 $L=mvr$ 是在圆形轨道运动的电子的动量矩,所以在玻尔理论中,电子的轨道动量矩是量子化的.整数 n 称为主量子数.

从式(11.1),(11.2)和(11.3)解出三个未知量 r,E 和 v,我们得到下面量子化的量:

$$r_n = \frac{n^2 r_1^0}{Z}, \qquad r_1^0 = \frac{h_2}{4\pi^2 kme^2} \tag{11.4}$$

$$E_n = -\frac{Z^2 E_1^0}{n^2}, \qquad E_1^0 = \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2} \tag{11.5}$$

$$v_n = \frac{Zv_1^0}{n}, \qquad v_1^0 = \frac{2\pi ke^2}{h} \tag{11.6}$$

在由式(11.4),(11.5)和(11.6)所指定的原子定态中,假定并不发射电子,发射过程在11.3节中讨论.最小能量态($n=1$)称为基态.

可以看到 r_1^0, E_1^0 和 v_1^0 只依赖于基本自然常数 m, e, k 和 h.利用这些常数的数值,我们得到

$$r_1^0 = 0.529\text{Å}, \quad E_1^0 = 13.58\text{eV}, \quad v_1^0 = \frac{c}{137}$$

注意对于氢原子($Z=1$),$r_1^0=r_1$, $E_1^0=-E_1$,和 $v_1^0=v_1$.数值0.529Å和13.58eV与实验确定的氢原子半径和离解能相符.

11.3　玻尔理论中辐射的放出

经典电动力学指出,(有加速度的)轨道电荷必然放出辐射,它的频率等于旋转的频率.但我们早在光电效应中看到,当考虑到电磁辐射的吸收时,经典电动力学必须修正为原子尺度.玻尔也以类似的方式修正经典电动力学来讨论电磁辐射.

玻尔认为,仅在电子从一个能量 $E=E_u$ 的可容许定态轨道改变为另一个能量较小的 $E=E_l$ 的定态轨道,原子才会放出辐射.放出的光子的能量于是等于在这两个可允许的轨道内的电子能量之差.这样,可找出所辐射的光子波长是

$$E_\gamma = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = E_u - E_l \quad 或 \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}(E_u - E_l) \tag{11.7}$$

代进由式(11.5)所给出的轨道能量数值,我们于是找到

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 k^2 e^4 mZ^2}{h^3 C}\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right) = R_\infty Z^2\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right)$$

这里

$$R_\infty = \frac{2\pi^2(ke^2)^2(mc^2)}{hc^3} = 1.09737\times 10^{-3}\text{Å}^{-1}$$

在这个分析中假定带正电的核质量比电子质量要大得多,以至于可以认为它是无穷大.如果考虑到核子的有限质量,电子(m)和核子(M)相距 r 围绕质心的组合系统的运动等价于一个具有折合质量

$$\mu = \frac{m}{1+\dfrac{m}{M}} = \frac{M}{1+\dfrac{M}{m}}$$

的粒子对质心的距离为 r 的运动.对于氢原子 $m/M=1/1836$,因为它要将里德伯常数修正为

$$R_{\text{H}} = \frac{R_\infty}{1+(m/M)} = \frac{1.09737\times 10^{-3}\text{Å}^{-1}}{1+(1/1836)} = 1.0968\times 10^{-3}\text{Å}^{-1}$$

这个数值与实验值 $R=1.0967758\times 10^{-3}\text{Å}^{-1}$ 一致.

11.4　能级图

一个描述在所容许的态中的变换的常用方式是利用能级图.在这里由式(11.5)给出的可容许能级,对于 $Z=1$ 的情况,已经画出,图11-1是 $Z=1$ 的情况.

这里变换用箭头表示,由 n_u 标记的初始能量态指向由 n_l 标记的末了能量态.于是,例如,对应于巴尔末系的变换是末端位于 $n_l=2$ 的箭头标记的.在巴尔末系中的线 H_α, H_β, H_γ,等,见图11-1所示.

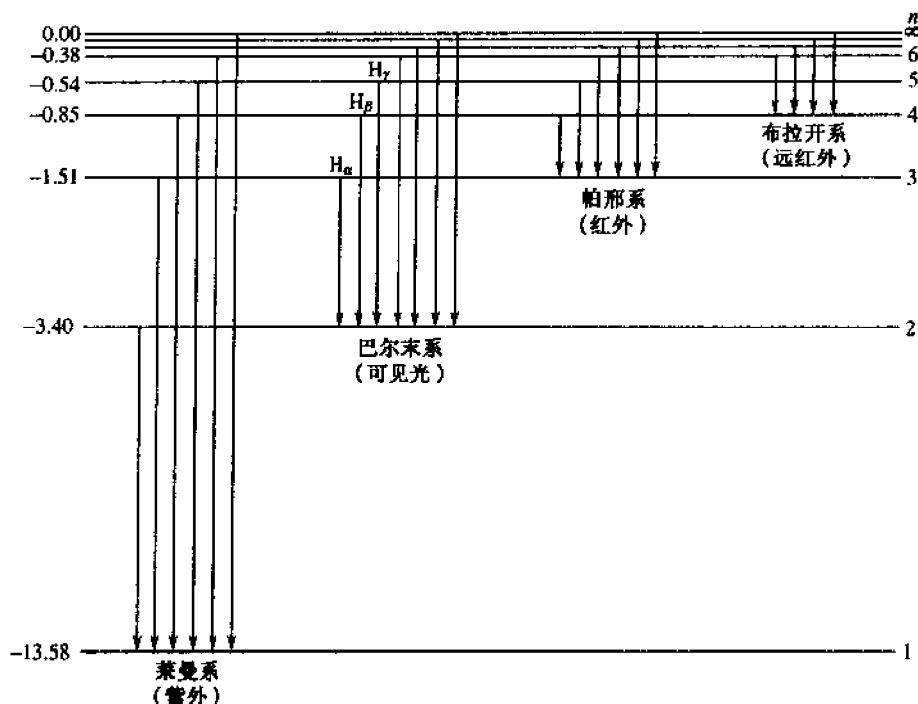


图 11-1

11.5　类氢原子

类氢原子是指将一个原子中的电子保留一个电子而剥离掉其余全部电子的结果.于是类氢原子是单极化氦(He^+, $Z=2$),双极化锂(Li^{2+}, $Z=3$),三极化铍(Be^{3+}, $Z=4$)等.这些原子的行为在各方面都像氢原子,但是核有正电荷 Ze,这里 Z 是原子的原子序数.方程(11.1)到(11.7)对于类氢原子适用,但要选择适当的 Z 值.图 11-2 是关于 H, He^+ 和 Li^{2+} 的能级.

例题详解

11.1　确定氢原子莱曼系的最短波长和最长波长,以埃为单位.

解 ☞　莱曼系的谱线中的 $n_l=1$:

$$\frac{1}{\lambda}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n_u^2}\right),\quad n_u=2,3,4,\cdots$$

最长的波长对应于 $n_u=2$:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\quad 或\quad \lambda_{\max}=1215\text{Å}$$

最短波长对应于 $n_u=\infty$:

$$\frac{1}{\lambda_{\min}}=1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1}\left(1-\frac{1}{\infty^2}\right)\quad 或\quad \lambda_{\min}=912\text{Å}$$

11.2　确定氢的帕邢系第二条线的波长.

解 ☞

$$\frac{1}{\lambda}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right)$$

帕邢系相当于 $n_l=3$,而第二条线对应着 $n_u=5$,从而

$$\frac{1}{\lambda}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)\quad 或\quad \lambda=12,820\text{Å}$$

11.3　氢的莱曼系的最长波长是 1215Å.计算里德伯常数.

解 ☞

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right)$$

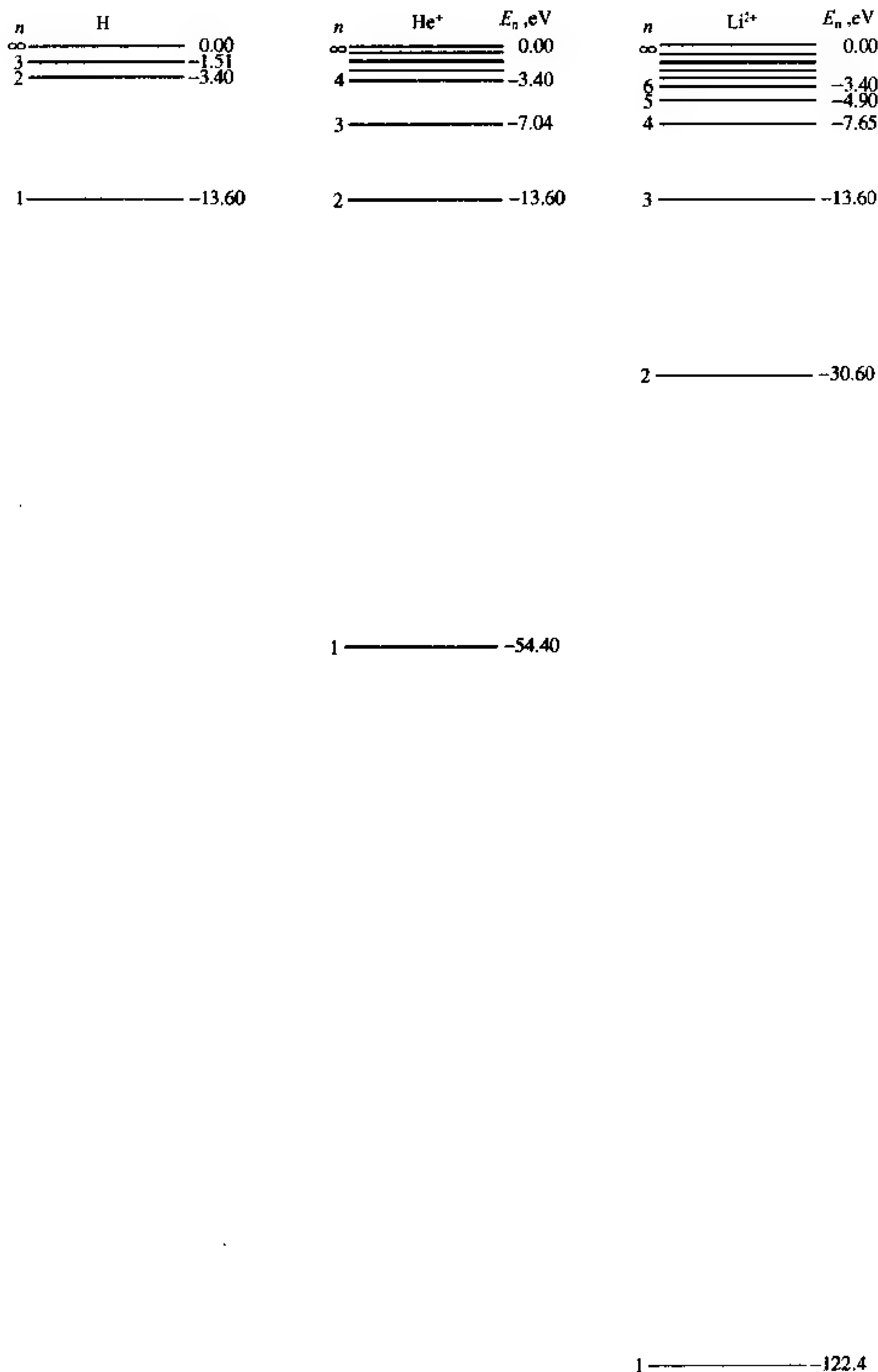


图 11-2

对于莱曼系，$n_l=1$，最长的波长对应于值 $n_u=2$.

$$\frac{1}{1215\text{Å}} = R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) \quad 或 \quad R = 1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1}$$

11.4　确定在可见光范围(3800Å 到 7700Å)范围氢的光谱线的波长.

解　☞　氢的光谱线波长见下面所示：

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right)$$

在题 11.1 中得到当 $n_l=1$，线系的波长范围从 912Å 到 1215Å，所以它们都不在可见光范围. 当 $n_l=$

2，其中最长的波长对应于 $n_u=3$，有

$$\frac{1}{\lambda}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)\quad 或\quad \lambda=6563\text{Å}$$

而最短的波长对应于 $n_u=\infty$，有

$$\frac{1}{\lambda}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)\quad 或\quad \lambda=3646\text{Å}$$

从而，巴尔末系($n_l=2$)的某些谱线在可见光范围之内.为了确定这些谱线，令 $\lambda=3800$Å 并且求出相应的 n_u.

$$\frac{1}{3.8\times10^3\text{Å}}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n_u^2}\right)\quad 或\quad n_u=9.9$$

于是在可见光段的谱线是

$$\frac{1}{\lambda}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n_u^2}\right)\quad n_u=3,4,5,\cdots,9$$

因为帕邢系($n_l=3$)的最短波长是

$$\frac{1}{\lambda}=(1.097\times10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)\quad 或\quad \lambda=8200\text{Å}$$

帕邢系及全部其他的系均在可见光范围之外.

11.5 求出氢原子的离解势能，以 eV 为单位.

解 ☞

$$E_1^0=\frac{2\pi^2k^2e^4m}{h^2}=\frac{2\pi^2(ke^2)^2(mc^2)}{(hc)}$$
$$=\frac{2\pi^2(14.40\text{eV}\cdot\text{Å})^2(0.511\times10^6\text{eV})}{(12.40\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å})^2}=13.6\text{eV}$$

11.6 当氢原子从 $n_u=5$ 变到 $n_l=2$，求出光子的波长.

解 ☞ 从玻尔模型，能级 $E_n=(-13.6\text{eV})/n^2$.从而

$$E_2=-\frac{13.6\text{eV}}{2^2}=-3.40\text{eV},\quad E_5=-\frac{13.6\text{eV}}{5^2}=-0.544\text{eV}$$

从玻尔假定知道，发出光子的能量是

$$E_\gamma=-0.544\text{eV}-(-3.40\text{eV})=2.86\text{eV}$$

相应光子的波长是

$$\lambda=\frac{hc}{E_\gamma}=\frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{2.86\text{eV}}=4340\text{Å}$$

这个问题还可以里德伯公式解出

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right)=1.097\times10^{-3}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}\right)$$

解出，$\lambda=4340$Å.

11.7 如果找到氢原子的巴尔末系的最短波长是 3650Å，确定它的离解能量.

解 ☞ 巴尔末系由 $n_l=2$ 给出，最短波长对应于 $n_u=\infty$.相应地，从 $E_n=-E_1^0/n^2$，这里 E_1^0 是离解能，我们有

$$\frac{hc}{\lambda}=E_u-E_l=0-\left(-\frac{E_1^0}{4}\right)\quad 或\quad E_1^0=\frac{4hc}{\lambda}=\frac{4(12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å})}{3650\text{Å}}=13.6\text{eV}$$

11.8 当氢原子从 $n=5$ 的变换到基底态，可以放射出多少种不同的光子？

解 ☞ 考虑任意的 n.对于任意一对在 1 到 n 范围内的任意一对整数 $n_u>n_l$ 来说，当从态 n 到基底态，这里至少有一种方式包括变换 $n_u\to n_l$.于是，光子数等于这种对子的数目，其数目是

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

对于 $n=5$，这里有 $5(4)/2=10$ 种光子.

如果有"蜕化"，即，如果两个不同的量子数对相应于同样的能量差，则上述的理由失效.这时，不同的光子数目小于 $n(n-1)/2$.

11.9 氢原子放出 4890Å 光子之后变换到激发能为 10.19eV 的状态.确定初始态的结合能.

解 ☞ 所放出的光子的能量是

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.40\times 10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{4.89\times 10^3\text{Å}} = 2.54\text{eV}$$

激发能(E_x)是指激发到基底态上一个能级所需要的能量.于是这个能级的能量是

$$E_n = E_1 + E_x = -13.6\text{eV} + 10.19\text{eV} = -3.41\text{eV}$$

光子出现于两个能态之间的变换,$E_u - E_l = h\nu$,从而

$$E_u - (-3.41\text{eV}) = 2.54\text{eV} \quad 或 \quad E_u = -0.87\text{eV}.$$

于是,在这个态上电子的结合能为0.87eV.

注意上述变换对应于

$$n_u = \sqrt{\frac{E_1}{E_u}} = \sqrt{\frac{13.6\text{eV}}{0.87\text{eV}}} = 4 \text{ 和 } n_l = \sqrt{\frac{E_1}{E_l}} = \sqrt{\frac{13.6\text{eV}}{3.41\text{eV}}} = 2$$

11.10 用12.2eV能量的电子激发气体放电管中的氢原子.确定氢原子所能放出的辐射波长.

解 ☞ 氢原子可以吸收的最大能量等于电子的能量12.2eV.吸收这个能量将使原子进入能态E_u,其关系是(设原子初始处于基态)

$$E_u = E_1 + 12.2\text{eV} = -13.6\text{eV} + 12.2\text{eV} = -1.4\text{eV}$$

数值n对应于能态$E_n = -E_1^0/n^2$;于是

$$1.4\text{eV} = \frac{13.6\text{eV}}{n^2} \quad 或 \quad n = 3.12$$

因为n必须是整数,能达到的最高态对应于$n=3$.从而(题11.8)原子回到基底态有三种转换方式是3→2,2→1和3→1,对应着三种可能的辐射,它们的波长由下面的关系确定:

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097\times 10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \quad 或 \quad \lambda = 6563\text{Å}$$

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097\times 10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \quad 或 \quad \lambda = 1215\text{Å}$$

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097\times 10^{-3}\text{Å}^{-1})\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) \quad 或 \quad \lambda = 1026\text{Å}$$

11.11 按照玻尔理论,如果氢原子的第一激发态的寿命是10^{-8}s,那么相应的电子共转了多少圈?

解 ☞ 由式(11.4)和(11.6)$n=2$的态的半径和轨道速度是

$$r_2 = 4r_1^0 = 4(0.529\text{Å}) = 2.12\text{Å} = 2.12\times 10^{-10}\text{m}$$

$$v_2 = \frac{v_1^0}{2} = \frac{c}{2(137)} = \frac{3\times 10^{10}\text{m/s}}{2(137)} = 1.10\times 10^6\text{m/s}$$

角速度是

$$\omega = \frac{v_2}{r_2} = \frac{1.10\times 10^6\text{m/s}}{2.12\times 10^{-10}\text{m}} = 0.52\times 10^{16}\text{rad/s}$$

而总转数是

$$N = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{(0.52\times 10^{10}\text{rad/s})(10^{-8}\text{s})}{6.28\text{rad/转}} = 8.3\times 10^6 \text{ 转}$$

11.12 考虑到氢核的反跳动能,确定辐射出的光子的修正量.

解 ☞ 设原子初始处于静止,由能量守恒给出

$$E_u = E_l + E_\gamma + K \quad 或 \quad \frac{E_u - E_l}{hc} - \frac{E_\gamma}{hc} = \frac{K}{hc}$$

这里K是核的动能.式中左方第一项是$1/\lambda_0$,而第二项是$1/\lambda$,这里λ_0和λ都是未修正的实际波长.于是

$$\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} = \frac{K}{hc} \quad 或 \quad \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda K}{hc}$$

核的反跳动量是$p = \sqrt{2MK} = \frac{h}{\lambda}$或$K = \frac{h^2}{2M\lambda^2}$;从这里

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda(h^2/2M\lambda^2)}{hc} = \frac{hc}{2(Mc^2)\lambda} = \frac{12.40\times 10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{2(939\times 10^6\text{eV})\lambda}$$

$$= \frac{6.60\times10^{-6}\text{Å}}{\lambda}$$

因为波长的数量级是 $\lambda\sim10^{3}$Å,相对变化在 10^{-9}量级,因此可以略去.

11.13 对于氢原子,证明当 $n\gg1$,在 n 到 $n-1$ 的变换中所放出的光子的频率等于旋转频率.

解 ☞ 在态 n 的旋转频率是

$$\frac{\omega}{2\pi}=\frac{v_n}{2\pi r_n}=\frac{2\pi ke^2/nh}{2\pi n^2h^2/4\pi^2kme^2}=\frac{4\pi^2k^2me^4}{n^3h^3}$$

发射光子的频率是

$$\nu=c\,\frac{1}{\lambda}=cR_\infty\left[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right]=cR_\infty\,\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

对于 $n\gg1$,

$$\nu\approx cR_\infty\,\frac{2n}{n^2n^2}=c\,\frac{2\pi^2k^2e^4m}{h^3c}\,\frac{2}{n^3}=\frac{4\pi^2k^2me^4}{n^3h^3}$$

此式与上面所给的旋转频率相同.

11.14 一个电子围绕电荷 $+Ze$ 的核沿圆周旋转.相对于这个轨道半径的电子速度是多少?

解 ☞ 库仑力等于(电子质量)×(向心加速度)

$$\frac{k(e)(Ze)}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\quad 或\quad v^2=\frac{kZe^2}{mr}$$

11.15 在题 11.14 中相对于其轨道半径的电子的总能量是多少?

解 ☞ 电子的电势能是

$$U=qV=(-e)V=-e\,\frac{k(Ze)}{r}=-\frac{kZe^2}{r}$$

利用题 11.14 的结果可以得到电子的动能

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\,\frac{kZe^2}{mr}=\frac{kZe^2}{2r}$$

总能量是

$$E=K+U=\frac{kZe^2}{2r}-\frac{kZe^2}{r}=-\frac{kZe^2}{2r}=\frac{1}{2}U$$

11.16 假定全部变换都是可能的,氢的可见光谱(3800Å 到 7700Å)比起双重极化的锂的可见光谱来是多还是少?

解 ☞ 对于氢:$E_{n\mathrm{H}}=-\dfrac{E_1^*}{n^2}$

对于 Li^{2+}:$E_{n\mathrm{Li}}=-\dfrac{Z^2E_1^*}{n^2}=-\dfrac{E_1^*}{(n/3)^2}$从而在 Li^{2+} 的能级图中包含氢的全部能级之外,还有对于每一个氢的能级附加两个额外能级.因为 Li^{2+} 中有更多的能级可供利用,在 Li^{2+} 的可见光谱中比起氢的可见光谱有更多的线.

11.17 如果氘和氢的 H_α 线的波长分别是 6561.01Å 及 6562.80Å(氘是通过这种类型的测量发现的.),求出它们的质量比.

解 ☞ 利用原子的折合质量,里德伯公式是

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{R_\infty Z^2}{1+\frac{m}{M}}\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right)$$

这里 m 和 M 是电子和核子质量.对于给的变换和给定的 Z,此式表示 λ 正比于 $1+m/M$,所以

$$\frac{\lambda_{\mathrm{D}}}{\lambda_{\mathrm{H}}}=\frac{1+\frac{m}{M_{\mathrm{D}}}}{1+\frac{m}{M_{\mathrm{H}}}}$$

或者

$$\frac{\lambda_D-\lambda_H}{\lambda_H}=\frac{\frac{m}{M_D}-\frac{m}{M_H}}{1+\frac{m}{M_H}}=\frac{m}{M_H}\frac{M_H-M_D}{M_D\left(1+\frac{m}{M_H}\right)}\approx\frac{m}{M_H}\frac{M_H-M_D}{M_D}$$

代进数据和 $m/M_H=1/1836$

$$\frac{-1.79\text{Å}}{6562.80\text{Å}}\approx\frac{1}{1836}\left(\frac{M_H}{M_D}-1\right)$$

解出

$$\frac{M_H}{M_D}\approx 0.5 \quad 或 \quad \frac{M_D}{M_H}\approx 2.0$$

11.18 确定电子偶素(一个正电子和一个电子的复合束缚系统)的里德伯常数.

解 ☞ 正电子的质量和电子的质量相同,所以

$$R_P=\frac{R_\infty}{1+(m/M)}=\frac{R_\infty}{1+(m/m)}=\frac{R_\infty}{2}=0.5485\times10^{-3}\text{Å}^{-1}$$

11.19 参照题11.18.求出电子偶素的离解势能.

解 ☞ $$\frac{1}{\lambda}=R_P\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right) 或 \frac{hc}{\lambda}=h\nu-hcR_p\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right)$$

离解势能是将电子偶素从基态($n_l=1$)激发到 $n_l=\infty$ 所需要的能量.于是

$$E_{离解}=hcR_P=(12.40\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å})(0.5485\times10^{-3}\text{Å}^{-1})=6.8\text{eV}$$

11.20 在可调电压 V 作用下,电子在丝极和栅极之间加速通过汞蒸气,如同图11-3(a)所示.一个小的迟滞电压,$V_R\approx0.5$V,保留在栅极和收集极之间.当测量到的收集极电流 I 看作是加速电压的函数时,获得图11-3(b)的曲线.确定汞的第一激发能级和在实验中由汞发射出的光的波长.

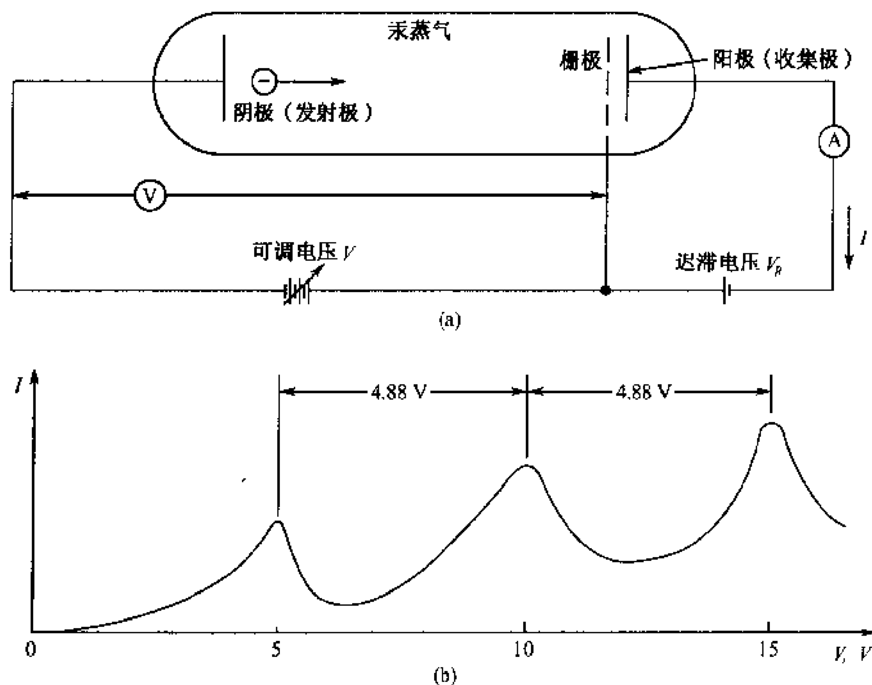


图11-3

解 ☞ 能到收集极的电子的动能要大于栅极和收集极之间的约0.5eV的迟滞势能.当加速电势增加,电子获得越来越大的动能,从而到达收集极的也越来越多,结果是增加了电流.但逐渐地电子获得了相当于汞原子第一激发态的能量.这时电子可使汞原子进入激发态而丧失了动能.于是,有足够的能量克服迟滞位势 V_R 的电子变少,其结果是在收集极电流上看到一个极小.此外,原来是暗淡的汞蒸气在原子回到基态时将放出辐射.

当电压 V 进一步增加,电流也增加,因为电子在激发汞原子之后可以获得附加动能.在更加大的加速电压下,电子有足够的能量去激发两个汞原子,其结果是在 I 中出现第二个极小,等等.(我们略去电子将汞原子推到更高的激发态的可能性.要发生上面略去的过程需对跨越蒸气管两端的电压变化有特别的要求.)在电流尖峰之间的电压差于是即是对应于将汞推向第一激发态所需要的能量,所以

$$\Delta E = e\Delta V = 4.88\text{eV}$$

(第一尖峰的电位不可应用,因为存在着 V_R 和不同的接触电位.)当激发的汞原子回到基底态,所放出的光子的波长是

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{4.88\text{eV}} = 2540\text{Å}$$

这个实验在1914年首先由J.夫兰克和G.赫兹做出并且是表明原子中定态存在的第一个实验,它进一步确认了玻尔提出的量子假设.此外,它表明原子可以与有能量电子相互作用而激发.

μ子原子和π介子原子

在汤川关于核结合力(即强相互作用)的阐释中曾经指出称为介子的粒子的存在,其静止质量是电子的静止质量的264倍.在提出这个预言两年之后,在1937年,找到一个粒子,其质量是电子质量的207倍.但是,在1946年证明这个 μ 子并不是所预期的粒子,并且在一个短时间之后,找到了称为 π 介子的汤川粒子.

π 介子和 μ 子两者都可以带有负电荷,并且因而可以构成类氢原子.由于这些粒子的质量大,它们的玻尔轨道比起电子的轨道小得多.

11.21　μ 子被质子俘获生成 μ 子原子,求出它的离解能量.

解 ☞　与对氢原子的分析在各方面都相同,但在电子质量 m 处需要换成207m.

$$E_{离解} = 207(13.6\text{eV}) = 2.82\text{keV}$$

11.22　参照题11.21.计算 μ 子原子在 ^{208}Pb($Z=82$)中的第一玻尔轨道半径.

解 ☞　由式(11.4),r_1 与 Zm 反比.从而

$$r_{1\mu} = \frac{1}{(82)(207)}(0.529\text{Å}) = 3.12\times10^{-5}\text{Å} = 3.12\text{fm}$$

11.23　对于题11.22,计算第一玻尔轨道能量.

解 ☞　由式(11.5),E_1 正比于 Z^2m.从而

$$E_{1\mu} = (82)^2(207)(-13.58\text{eV}) = -19.0\text{MeV}$$

11.24　参考题11.21到11.23,对于208Pb的 μ 子原子,求出在第一莱曼变换($n_u=2$ 到 $n_l=1$)时射出的光子能量是多少?

解 ☞

$$E_\lambda = \Delta E = E_u - E_l = -Z^2E^*_1\left(\frac{1}{n_u^2}-\frac{1}{n_l^2}\right)$$
$$= E_1\left(\frac{1}{n_u^2}-\frac{1}{n_l^2}\right) = (-19.0\text{MeV})\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right)$$
$$= 14.25\text{MeV}$$

补 充 习 题

11.25　对于巴尔末系重复题11.1.

答案:3646Å;6563Å

11.26　以埃为单位,确定在 $n_u=6$ 到 $n_l=3$ 的变换中射出的光子(帕邢系中的第3条线)的波长.

答案:1.094×10^4Å

11.27　计算在 $n_l=4$ 变换系列(布拉开系列)的最短波长光子.

答案:1.459×10^4Å.

11.28　在氢原子巴尔末系中的最短波长是3646Å.由此确定里德伯常数.

答案:1.097×10^{-3}Å^{-1}

11.29 氢光谱中一条线为1026Å(注意:这条线在赖曼系中)求出在系列中的相应 n_u 值.

答案:3

11.30 对于4861Å的氢谱线(注意:此线在巴尔末系)重复题11.29.

答案:4

11.31 计算 ke^2,以 eV·Å 为单位.

答案:14.40eV·Å

11.32 证明 $v^*_1/c=2\pi ke^2/hc\equiv\alpha$ 是1/137.无量纲常数 α 称为精细结构常数.

11.33 从式(11.4),求出氢原子的第一玻尔轨道半径,以Å为单位.

答案:0.529Å

11.34 求出电子的康普顿波长(第9章)和氢原子的第一玻尔轨道半径之比.

答案:21.8

11.35 一个电子能够使氢原子激发离开基态,对电子的最小加速电位是多少?

答案:10.2V

11.36 必须至少要给氢原子多少能量,才能使它能够辐射出 H_β 线.(H_β 线对应于 $4\rightarrow2$ 变换.)

答案:2.55eV

11.37 确定电子在氢的第三激发态时的结合能.

答案:0.85eV

11.38 当一个电子能够使一个氢原子离解,其加速电势是多少?

答案:13.6V

11.39 用12.6eV轰击一个未激发的氢原子,其最高激发态是什么?

答案:$n=3$

11.40 当在 $n_u=10$ 到 $n_l=1$ 的变换过程中放出一个光子后,求出这个氢原子的反跳能量.

答案:9.6×10^{-8}eV

11.41 计算从原子用折合质量而引起的差异所产生的波长的相对误差.

答案:$\Delta\lambda/\lambda=-\Delta\nu/\nu$

11.42 确定对于双重离解锂的第二玻尔轨道半径.

答案:0.705Å

11.43 对于三重离解铍($Z=4$),确定其第一玻尔轨道半径.

答案:0.132Å

11.44 如果氢的 H_β 线是4862.6Å,确定氘的 H_β 线的波长.

11.45 计算电子偶素的第一和第二轨道半径.

答案:1.06Å;4.23Å

11.46 (a)计算电子偶素的前三个能级;(b)求出电子偶素的 H_α 线($3\rightarrow2$ 变换)波长.

答案:(a)-6.8eV, -0.76eV;(b)1313Å

第 12 章　电子轨道运动

12.1　经典观念的轨道角动量

如图 12-1 所示，考虑一个质量为 m 的质点在有心力作用下在椭圆轨道上运动. 对于力心的角动量矢量 $\mathbf{L}$ 具有大小 mvd，这里 d 是力心到速度方向的垂直距离，而 v 是质点的速率. $\mathbf{L}$ 的方向由通常的右手规则确定，见图 12-1. 从牛顿第二定律，作用于质点的纯力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 等于角动量的变化率；$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$. 但是，因为作用在质点上的力是有心力，所作用的力矩必然为零. 从而质点的动量矩 $\mathbf{L}$ 在椭圆轨道各点的大小和方向都不变，即在有心力作用下动量矩守恒.

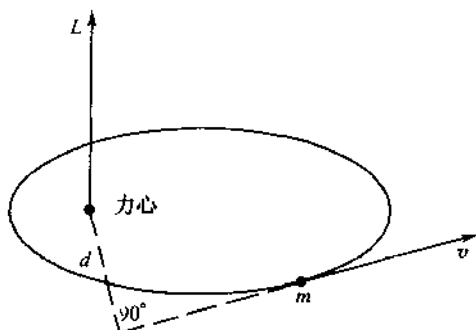


图 12-1

图 12-2 表示各种可能的椭圆运动，其长轴 $2a$ 相同，形状从圆周到近似于一直线. 可以证明，总能量 E（动能加位能）只与长轴的大小有关，因此对于全体这些椭圆具有相同的数值（例如对于库仑力，$E=-ke^2/2a$；见题 11.15）但轨道角动量各个椭圆都不一样，其范围从圆形的最大值 $a\sqrt{-2mE}$ 到与直线相近的近似零值.（直线椭圆具有零动量矩，因为沿着轨道处处都有 $d=0$.）

因为 $\mathbf{L}$ 是常量，在空间任何方向的分量 $L_z=L\cos\theta$ 在椭圆轨道运动中也是常量. 在经典图像中，对 θ 没有任何限制，它可以取从 0°到 180°中间的任何一个值.

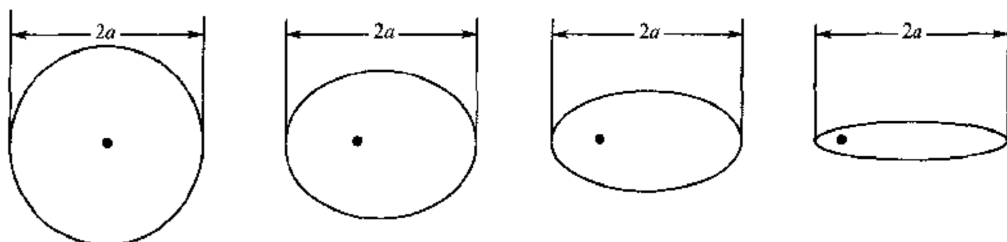


图 12-2

12.2　经典磁偶极矩

在圆形路线运动的一个电子将产生一个电流，其关系是

$$I=(\text{电子电荷})\times(\text{每秒通过给定点的次数})=ef$$

这里 f 是电子为旋转的频率. 圆形电流圈将生成一个磁场，它与一个小磁棒所产生的场非常类似，见图 12-3. 与磁棒一样，联系于轨道电流有一个磁矩 $\boldsymbol{\mu}$，它的大小是

$$|\boldsymbol{\mu}|=IA=(ef)(\pi r^2) \tag{12.1}$$

而它的方向与 $\mathbf{L}$ 的相反（因为电子具有负电荷）. 因为

$$|\mathbf{L}|=mvr=m(2\pi rf)r=2mf\pi r^2=\frac{2m}{e}|\boldsymbol{\mu}|$$

我们有

$$\boldsymbol{\mu}=-\frac{e}{2m}\mathbf{L} \tag{12.2}$$

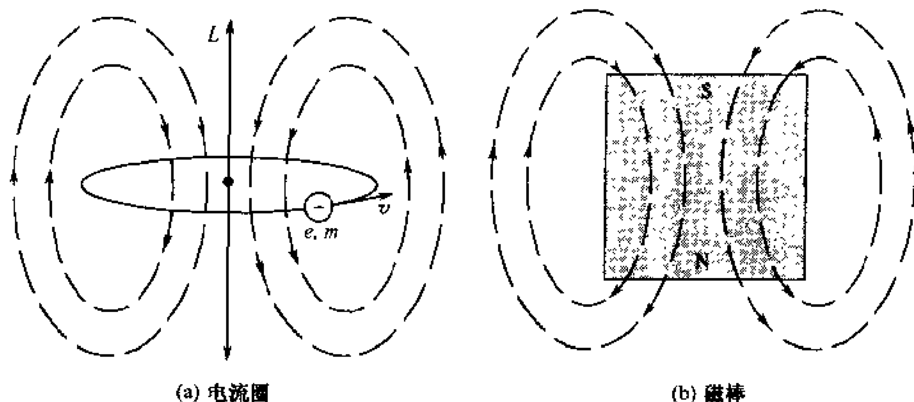


图 12-3

12.3　在外磁场中磁偶极矩的经典能量

设电流圈或小磁棒放在外部磁场 **B** 中. 这个圈受到一个力矩

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \tag{12.3}$$

倾向于将 $\boldsymbol{\mu}$ 向 **B** 靠拢. 于是系统具有势能 E_B, 它的改变即是 $\boldsymbol{\mu}$ 的方向改变时力矩所作的功. 对力矩求积分, 可以证明

$$E_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \tag{12.4}$$

选择 **B** 的方向作为 z 方向并且利用式(12.2), 对于一个轨道电子有

$$E_B = \frac{e}{2m}\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m}L_z B \tag{12.5}$$

12.4　塞曼实验

关于原子内部磁矩和外磁场的相互作用效应的实验测量在量子力学出现之前由荷兰物理学家 P. 塞曼在 1896 年做出. 在塞曼实验中, 一个原子放在外磁场中并且测量它的激发谱并与没有磁场存在的谱相比较. 这个任务是可以完成的, 例如, 测量放在磁场中的放电管所放出的辐射的波长.

当做完了实验, 找到在外磁场存在时, 每一条谱线分裂为若干条谱线. 此外, 观察到线的频率的改变正比于所用的磁场的大小. 观察到额外谱线意味着原子放在外磁场中时有附加的离散能级. 塞曼分裂的解释需要用到量子力学, 在分析中指出轨道动量矩的大小和方向都是量子化的.

12.5　轨道动量矩大小的量子化

量子力学的分析指出, 在单电子原子中电子的轨道动量矩并不是由玻尔理论所指出的单个数值 $n\hbar$ ($\hbar = h/2\pi$). 代替它的是, 对于一个给定的主量子数 n (即对于给定能量 $E_n = E_1^0/n^2$) 这里有 n 个可能的数值

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \tag{12.6}$$

这里 l 是一个整数, 称为轨道角动量量子数, 取值范围为

$$l = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{12.7}$$

特别, 对于 $n = 1$ 所对应的最低能量值, l 的数值为零, 因而轨道角动量也是零.

12.6　轨道角动量方向的量子化

设单电子原子放在外磁场中, 磁场的方向取作 z 方向. 量子力学的分析指出轨道动量矩矢量

L 的方向不能是任意的. 要求 **L** 的定向必须使得沿 z 方向的分量 L_z 是量子化的,其数值为

$$L_z = m_l \hbar \tag{12.8}$$

这里 m_l 是个整数,称为磁量子数,其数值是

$$m_l = l, l-1, l-2, \cdots, 0, \cdots, -(l-1), -l \tag{12.9}$$

注意对于给定的 l, L_z 的最大值($= l\hbar$)小于 **L** 的大小($= \sqrt{l(l+1)}\hbar$).

12.7 塞曼效应的解释

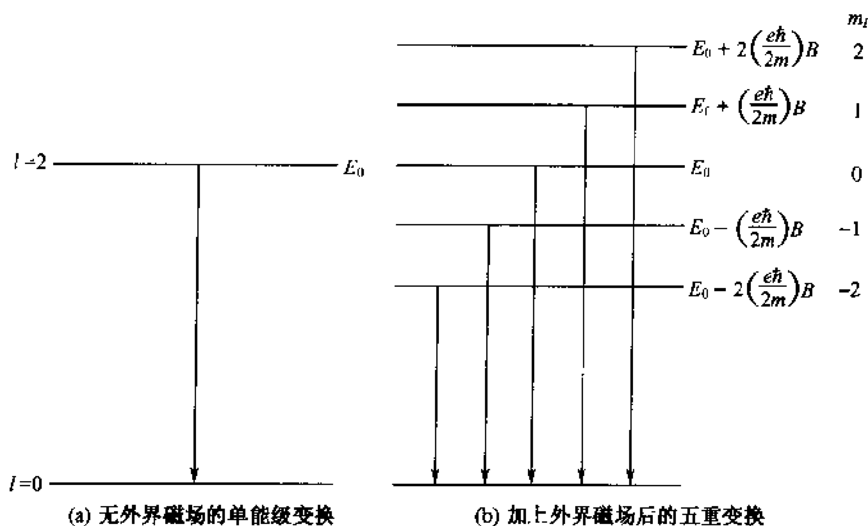
量子力学指出,放在外磁场中的单电子原子的能量因位能(12.5)而改变. 但是,现在按照式(12.8), L_z 是量子化的,所以总能量是

$$E = E_0 + E_B = E_0 + m_l \frac{e\hbar}{2m} B \tag{12.10}$$

这里 E_0 是在磁场加上之前的量子化能量. 于是,在磁场存在条件下,每一个能级 E_0 将分裂为 $2l+1$ 个等距离的子能级,其距离正比于 B. 因子 $e\hbar/2m$ 称为玻尔磁子,它的值是

$$\frac{e\hbar}{2m} = 5.79 \times 10^{-5} \mathrm{eV/T} = 9.27 \times 10^{-24} \mathrm{J/T}$$

因为在加上磁场之后有较多的离散能级可供利用,当原子放到外磁场中时,将会看到在原子激发谱中有附加的离散线,如图 12-4 所示



(a) 无外界磁场的单能级变换　　(b) 加上外界磁场后的五重变换

图 12-4

人们找到在原子中更多的强度变换服从下面的选择定则

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m_l = \pm 1 \text{ 或 } 0 \tag{12.11}$$

对于电偶极子变换,式(12.10)给出 $\Delta E = \Delta E_0$(零场谱线)以及

$$\Delta E = \Delta E_0 \pm \frac{e\hbar}{2m} B$$

即两条新的线,它们与零场能量线相差的绝对值是

$$\Delta E_{Zee} = \frac{e\hbar}{2m} B \tag{12.12}$$

其他的变换也可以发生,但是出现的是较弱的谱线. 在任何一种情况中,在新线之间的能量或频率差都正比于所加的磁场.

上面的结论严格地对应于所观察到的"正常"塞曼效应. 离散的分裂是轨道动量矩量子化现象的明显的实验证据. 如果动量矩的方向并未量子化,于是 L_z 可以取得全部可能的数值,如同在玻尔理论中的一样,而谱线也将拓宽而成一个连续的能带而不是实验中所看到的离散

值.上面的分析并未阐明全部的在塞曼实验所观察到的谱线.还有附加变换,它们属于反常塞曼效应的范畴(第 15 章),其中包含了电子自旋的概念(第 13 章).

例题详解

12.1　电子围绕着质子沿半径为 r 的圆形轨道运动,求出它的磁矩.

解 ☞　从式(12.1),磁矩是

$$\mu = IA = (ef)(\pi r^2)$$

电子的运动方程是

$$F_{\text{rad}} = ma_{\text{rad}} \text{ 或 } \frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

从这里

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke}{mr}}$$

于是

$$\mu = \pi e r^2\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke}{mr}}\right) = \frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{kr}{m}}$$

12.2　求出轨道磁距 $\boldsymbol{\mu}$ 在磁场 $\mathbf{B}$ 中进动的频率.

解 ☞　磁矩在磁场中受到一个力矩 $\boldsymbol{\tau}$,关系见式(12.3)为

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B} = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}\times\mathbf{B}$$

力矩使得动量矩改变,其关系是

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}\times\mathbf{B}$$

$\mathbf{L}$ 的微分 $\mathrm{d}\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{L}$ 以及 $\mathbf{B}$ 正交,如图 12-5 所示,其结果是 $\mathbf{L}$ 围绕着 $\mathbf{B}$ 方向进动.从图 12-5 可以看到

$$\mathrm{d}\phi = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{L}|}{L\sin\theta}$$

从这里

$$\omega_p = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}\right|}{L\sin\theta} = \frac{\frac{e}{2m}LB\sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{e}{2m}B$$

这是已知的拉莫尔进动而 ω_p 是与正常塞曼效应观察到的频率差相等.

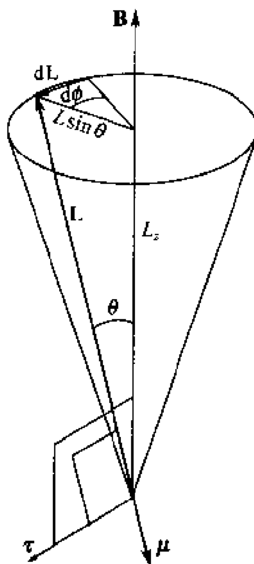


图 12-5

12.3　利用量子力学结果,计算对于 $n=3$ 能级可能的磁矩.

解 ☞　对于 $n=3$, l 的可能值是 2,1,0 以及 $L=\sqrt{l(l+1)}\hbar$.

当 $l=2$:

$$\mu = \frac{e}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m}\sqrt{l(l+1)} = \left(0.927\times10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}\right)\sqrt{2(2+1)}$$

$$= 2.27\times10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}$$

当 $l=1$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m}\sqrt{l(l+1)} = \left(0.927\times10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}\right)(\sqrt{2}) = 1.31\times10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}$$

当 $l=0$, $\mu=0$.

注意这些结果中没有一个与玻尔理论中所指出的相同.从玻尔理论 $L=n\hbar$,所以

$$\mu_B = \frac{e}{2m}L = \frac{e}{2m}3(\hbar) = 3\left(\frac{e\hbar}{2m}\right) = 3\left(0.927\times10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}\right)$$

$$= 2.78\times10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}$$

12.4　求出轨道动量矩矢量 L 的可能方向，当 $l=0,1,2,3$ 和 4.

解 ☞　L_z 的可能值是 $m_l\hbar$，这里 m_l 取 $+l$ 到 $-l$ 之间的所有整数值. 轨道动量矩矢量的相应可能定向见图 12-6.

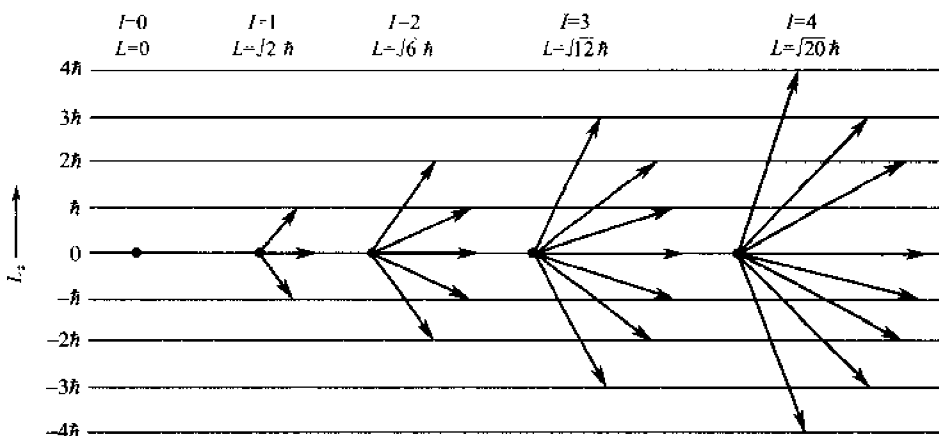


图 12-6

12.5　确定镉红线 6438Å 在原子放在 0.009T 磁场内时的正常塞曼分裂.

解 ☞　取 $E=hc/\lambda$ 的微分

$$dE=-hc\frac{d\lambda}{\lambda^2}\quad 或\quad |d\lambda|=\frac{\lambda^2|dE|}{hc}$$

可求得波长的改变. 从式(12.12)可求得能量的变化

$$|dE|=\Delta E_{Zee}=\frac{e\hbar}{2m}B=\left(5.79\times10^{-5}\frac{eV}{T}\right)(0.009T)$$
$$=5.21\times10^{-7}eV$$

从此推出

$$|d\lambda|=\frac{\lambda^2|dE|}{hc}=\frac{(6438Å)^2(5.21\times10^{-7}eV)}{12.4\times10^3eV\cdot Å}=1.74\times10^{-3}Å$$

12.6　如果分光计可以在 5000Å 附近分辨 0.05Å 间隔的光谱线，问要观察到正常塞曼效应需要多大的磁通密度 B.

解 ☞　从题 12.5

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{dE}{hc/\lambda}=\frac{(e\hbar/2m)B}{hc/\lambda}$$

求得

$$B=\frac{|d\lambda|}{\lambda}\left(\frac{hc}{\lambda}\right)\left(\frac{2m}{e\hbar}\right)=\left(\frac{0.5Å}{5000Å}\right)\left(\frac{12.4\times10^3eV\cdot Å}{5000Å}\right)\left(\frac{1}{5.79\times10^{-5}eV/T}\right)=4.28T$$

12.7　在正常塞曼实验中，钙 4226Å 线分裂成三条线，其间间隔为 0.25Å，外界磁场为 3T. 从这些数据确定出电子的 e/m.

解 ☞　从题 12.6($\hbar=h/2\pi$)

$$\frac{|d\lambda|}{\lambda}=\frac{(e/4\pi m)B}{c/\lambda}$$

解出 e/m，得到

$$\frac{e}{m}=\frac{4\pi}{B}\left(\frac{c}{\lambda^2}\right)|d\lambda|=\frac{4\pi}{3T}\left[\frac{3\times10^8m/s}{(4226\times10^{-10}m)^2}\right]\cdot(0.25\times10^{-10}m)=1.76\times10^{11}C/kg$$

12.8　在 0.6T 磁场下一个原子发生了 $l=2$ 和 $l=1$ 态之间的变换. 如果在磁场加上之前波长是 5000Å，求出所观察到的波长.

解 ☞　在相关两能级之间的能量间隔是

$$\Delta E_{Zee} = \frac{e\hbar}{2m}B = \left(5.79 \times 10^{-5}\frac{\text{eV}}{\text{T}}\right)(0.6\text{T})$$
$$= 3.47 \times 10^{-5}\text{eV}$$

于是，与题 12.5 一样，

$$|d\lambda| = \frac{\lambda^2 \Delta E_{Zee}}{hc} = \frac{(5000\text{Å})^2(3.47 \times 10^{-5}\text{eV})}{12.4 \times 10^3\text{eV} \cdot \text{Å}} = 0.07\text{Å}$$

这些变换必须满足选择定则 $\Delta m_l = +1, 0, -1$；见图 12-7 所示.从 9 种可能变换之中仅看到三种不同的波长

$$\lambda_+ = 5000.07\text{Å}, \quad \lambda_0 = 5000\text{Å}, \quad \lambda_- = 4999.93\text{Å}$$

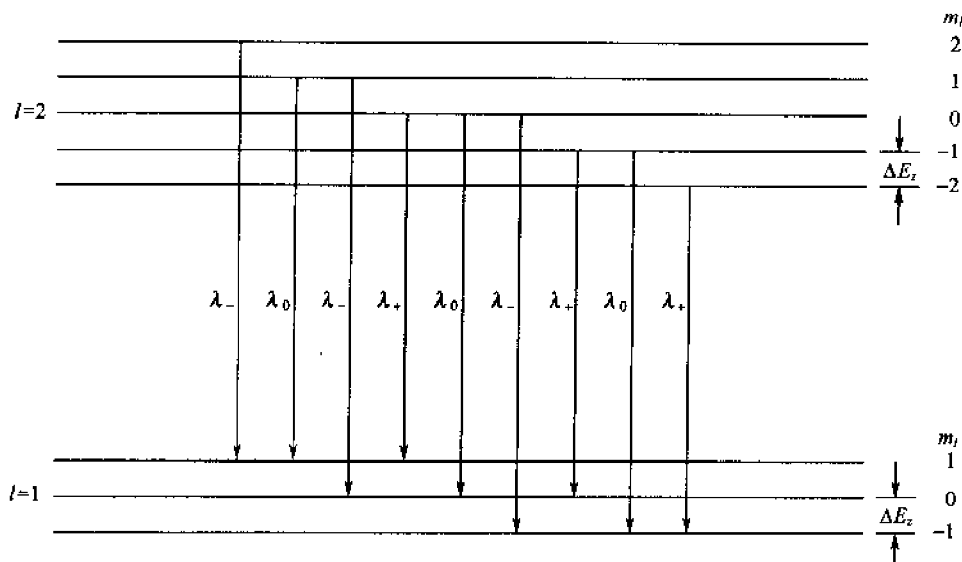


图 12-7

补充习题

12.9 He^+ 中一个电子处于 $n=2$ 的轨道中，按照玻尔理论，由于它的轨道运动而生成的磁矩是多少？

答案：1.85×10^{-23}J/T

12.10 利用量子力学理论重新处理题 12.9.

答案：1.31×10^{-23}J/T 或 0

12.11 圆形轨道中的一个电子具有动量矩 $\sqrt{2}\hbar$.在 0.5T 的场中它的拉莫尔频率是多少？

答案：6.99×10^9Hz

12.12 对于 $l=3$，计算 L 与 z-轴可能的夹角.

答案：16.8°；35.3°；60°

12.13 当磁场为 0.3T，计算汞 4916Å 线的正常塞曼分裂.

答案：3.38×10^{-2}Å

12.14 在 0.4T 的磁场中发出 4500Å 的辐射时，相继塞曼成分间的间隔是多少？

答案：3.78×10^{-2}Å

12.15 5000Å 的线显示了正常塞曼分裂为 1.1×10^{-3}Å.求出磁场.

答案：9.42×10^{-3}T

12.16 在磁场 1.2T 条件下，相应于相继磁的子能级到同样的终了态发送的在正常塞曼效应下的光子，其频率差是多少？

答案：1.68×10^{10}Hz

12.17 在一个原子中的变换发生在 $l=3$ 和 $l=2$ 的态之间，磁场为 0.2T. 如果在磁场加上之前的波长为 4000Å，确定所观察到的最终波长.

答案：4000.0149Å；4000Å；3999.9851Å

第 13 章　电子自旋

13.1　施特恩-格拉赫实验

在 1921 年所做的施特恩-格拉赫实验中，具有总轨道角动量为零的一束银原子通过一个非均匀磁场并且射到照相底板上，如图 13-1 所示. 当加上磁场时，束流的任何偏转都记录在照相底板上.

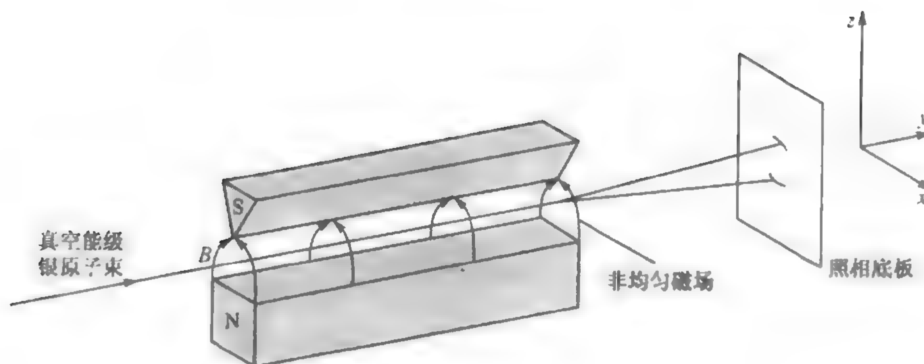


图 13-1

不均匀磁场的作用是对束中存在的任何磁矩产生偏移力. 如果用均匀磁场，每一个磁矩只受到力矩而不会受到偏移力. 但在非均匀磁场内，在每一个磁距 $\boldsymbol{\mu}_s$ 上将有一个纯粹的偏移力. 对于图 13-1 的情况

$$F_z = \mu_s \cos\theta \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} \tag{13.1}$$

这里 θ 是 $\boldsymbol{\mu}_s$ 和 $\mathbf{B}$ 之间的夹角，而 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}$ 是非均匀场的梯度(见题 13.1).

在这个实验中找到，当射束到达照相底板，它分成了两个不同部分，相对于无磁场时的击中点各有一半的原子分别向上或向下偏移. 因为原子具有为零的总轨道动量矩，使之产生偏移的磁相互作用必然来自另一些类型的磁矩.

13.2　电子自旋

在 1925 年 S.A. 古兹密特和 G.E. 乌伦见克提出电子具有一个内禀角动量，称作自旋. 与内禀自旋动量矩相联系的额外磁矩 $\boldsymbol{\mu}_s$ 确定了在施特恩-格拉赫实验中看到的原子束位移.

与轨道角动量类似，电子的内禀角动量及相联系的磁矩在大小和方向上都是量子化的. 在施特恩-格拉赫实验中看到的两条等间隔线表明内禀角动量相对于外加磁场方向可假设只有两个取向. 在 12.6 节曾经指出对于由量子数 l 标记的轨道运动，轨道磁矩沿磁场的分量有 $2l+1$ 个离散值. 类似地，如果自旋动量矩的量子数记为 S，因为只有两个定向是可能的，$2 = 2S+1$，我们有惟一的数值 $S=\frac{1}{2}$. 自旋动量 $\mathbf{S}$ 的大小于是为

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \tag{13.2}$$

沿着 z 方向的分量 S_z 是

$$S_z = m_s\hbar, \quad m_s = s, s-1 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \tag{13.3}$$

S 的两个定向通常称为"自旋朝上"$\left(m_s=+\frac{1}{2}\right)$和"自旋朝下"$\left(m_s=-\frac{1}{2}\right)$(虽然自旋从未指向正或负 z 方向.)

还有电子的内禀磁矩 $\mathbf{\mu}_s$ 和内禀动量矩 S 互为正比,其关系可以记为

$$\mathbf{\mu}_s=-g_s\frac{e}{2m}\mathbf{S} \tag{13.4}$$

这里无量纲数 g_s 称为回磁比;对于电子其数值为 2.002(在问题中我们用 $g_s\doteq 2$).把式(13.4)与(12.2)相比较有

$$g_s=\frac{|\mathbf{\mu}_s|/|\mathbf{S}|}{|\mathbf{\mu}|/|\mathbf{L}|}$$

于是,对于电子自旋来说其磁矩和动量矩之比大约是电子轨道运动的两倍.

电子有自旋 1/2 就像它有电荷及质量一样是一个基本参数.电子自旋的性质在 1928 年由狄拉克结合量子力学和相对论原理给予了阐释.要注意的是,电子之外的其他粒子如质子和中子也有内禀动量矩.

13.3　自旋-轨道耦合

在 12.3 节中指出,在磁场 B 中的磁矩 $\mathbf{\mu}$ 有势能

$$E_B=-\mathbf{\mu}\cdot\mathbf{B} \tag{13.5}$$

这个表达式中只考虑了外磁场,但结论适用于一般的情况.

在半经典的玻尔图像中,电子围绕着核旋转并且有轨道动量矩 L.从电子的观点看来,正电荷核以同样的角速度围绕电子旋转.于是旋转核在电子所在位置产生一个磁场 B,它平行于电子的轨道角动量 L.这个内部磁场又与 13.2 节描述的电子内禀磁矩 $\mathbf{\mu}_s$ 相互作用.因为 $\mathbf{\mu}_s$ 与电子的内禀自旋 S 正比,并且对于给定的轨道 B 和 L 正比,可以看到将有位能 E_s,其形式是

$$E_s=K\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} \tag{13.6}$$

这里无须考虑 K 的精确值.

自旋-轨道相互作用可以等效为内部塞曼效应,它将每一条 $\mathbf{L}\neq 0$ 的能级分裂成两条子能级,对应于式(13.3)指出的 S_z 的两个数值.

13.4　精细结构

与前面所考虑的比较起来现在有更多的能级可供利用,因此氢光谱上必有附加谱线,见图 13-2.这些附加线,或者精细结构,用相当高的分辨率的分光计是易于观察到的.应用这些仪

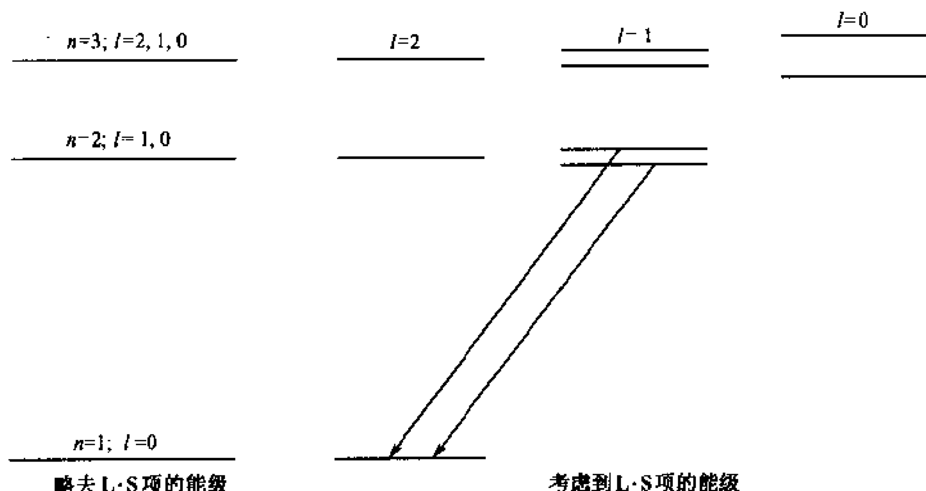


图 13-2

器,可以找到很多条谱线,它们在以前看来是单线,实际上是两条或多条线的复合组织,其中各线隔开若干埃的波长.

使得乌伦贝克和古兹密特引进电子自旋概念的原始动机是因为观察到谱线的精细结构.

13.5 总角动量(矢量模型)

在经典力学中总角动量(轨道加自旋)是一个重要的量,因为它的改变速率即是加到系统上的纯力矩.类似地,在量子力学中,从矢量相加得到的总角动量 $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

起着重要的作用.因为矢量模型既适用单电子原子,也适用于多电子原子,我们引进下面标记:标记各个电子状态的量子数将同以前一样用小写字母;标记原子状态的量子数用大写字母.在单电子原子的特别情况下,电子态就是原子态,用大写字母.

于是,用这种标记,量子化的 $\mathbf{J}$ 的大小记为

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar \tag{13.7}$$

量子数 J 具有下列各值:

$$J = L + S, L + S - 1, \cdots, |L - S| \tag{13.8}$$

这里 L 和 S 分别是轨道和自旋量子数.如同轨道和自旋动量矩情况,物理上的 J 在 z 方向的分量是离散量子化的.我们有

$$J_z = M_J\hbar, \quad M_J = J, J-1, J-2, \cdots, -J \tag{13.9}$$

对于氢原子,$S = \frac{1}{2}$,并且式(13.8)成为

$$J = \begin{cases} L + S, L - S, & L > 0 \\ S, & L = 0 \end{cases} \tag{13.10}$$

例题详解

13.1 推导(13.1).

解 ☞ 电子在磁场中的位能是[比较式(12.4)]

$$E_B = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} = -\mu_{sx}B_x - \mu_{sy}B_y - \mu_{sz}B_z$$

对于图 13.1 所示的场,$B_y = 0$ 并且 B_x 和 B_z 只依赖于 x 和 z.于是

$$F_x = -\frac{\partial E_B}{\partial x} = \mu_{sx}\frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu_{sz}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_B}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial E_B}{\partial z} = \mu_{sx}\frac{\partial E_x}{\partial z} + \mu_{sz}\frac{\partial B_z}{\partial_z}$$

但是沿着束流轴,$\partial B_z/\partial x = 0$(由于对称性)和 $\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$(由于反对称);以及 $\frac{\partial B_x}{\partial x}$ 是很小的量.相应地,

$$F_x \approx 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = \mu_{sz}\frac{dB}{dz} = \mu_s\cos\theta\frac{dB}{dz}$$

13.2 氢原子束以速率 2×10^5m/s 沿正交于梯度为 2×10^2T/m 的磁场移过 20cm,确定束流的最大间隔.略去质子的磁矩(见第 17 章).

解 ☞ 在基底态,氢原子有零轨道动量矩.从题 13.1,在氢原子上的力是

$$F_z = \mu_{sz}\frac{dB}{dz}$$

由式(13.3)及(13.4),以及 $g_s = 2$,$\mu_{sz} = -(e/m)m_s\hbar$,所以

$$|F_z| = \frac{e\hbar}{m}|m_s|\frac{dB}{dz} = \frac{e\hbar}{2m}\frac{dB}{dz} = \left(9.27\times10^{-24}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}\right)\cdot\left(2\times10^2\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{m}}\right) = 1.85\times10^{-21}\mathrm{N}$$

利用匀加速公式 $\Delta z=\frac{1}{2}a_z t^2$ 和 $\Delta y=vt$(坐标的规定见图 13-1),我们有

$$\Delta z=\frac{1}{2}a_z t^2=\frac{1}{2}\left(\frac{F_z}{m_H}\right)\left(\frac{\Delta y}{v}\right)^2$$

氢原子的质量是 1.67×10^{-27}kg,所以

$$\Delta z=\frac{1}{2}\left(\frac{1.85\times10^{-21}\text{N}}{1.67\times10^{-27}\text{kg}}\right)\left(\frac{0.20\text{m}}{2\times10^5\text{m/s}}\right)^2=5.54\times10^{-7}\text{m}$$

因为这是向上或向下的位移,总间隔是

$$2\Delta z=1.11\times10^{-6}\text{m}$$

13.3　当一束自由电子沿 0.8T 的均匀磁场的垂直方向运动时,确定自旋与磁场"一致"和"反向"的电子之间的能量差.

解 ☞　从题 13.1, $B_x=B_y=0$,

$$E_B=-B\mu_{sz}=-B\left(-\frac{e\hbar}{m}\right)m_s$$

从而

$$\Delta E_B=B\frac{e\hbar}{m}\Delta m_s=(0.8\text{T})\left(2\times5.79\times10^{-5}\frac{\text{eV}}{\text{T}}\right)\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=9.26\times10^{-5}\text{eV}$$

13.4　在描绘星系的射电天文学中用 21cm 线.当星系中氢原子中的电子与该原子中的质子从自旋平行状态"转"为自旋反平行状态时,所发射的光子所形成的线.电子所接受的磁场有多大?

解 ☞　$\Delta E=\frac{hc}{\lambda}=\frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{21\times10^8\text{Å}}=5.9\times10^{-6}\text{eV}$

从题 13.3,我们有

$$\Delta E_B=B\frac{e\hbar}{m}\Delta m_s$$

$$5.9\times10^{-6}\text{eV}=B\left[2\times5.79\times10^{-5}\frac{\text{eV}}{\text{T}}\right]\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$B=0.0510\text{T}$$

13.5　用 J, L 和 S 表达出 $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$.

解 ☞　计算 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\equiv|\mathbf{J}|^2$,这里 $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$,我们有

$$|\mathbf{J}|^2=(\mathbf{L}+\mathbf{S})\cdot(\mathbf{L}+\mathbf{S})=\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}+2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}+\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}$$
$$=|\mathbf{L}|^2+2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}+|\mathbf{S}|^2$$

或者

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}(|\mathbf{J}|^2-|\mathbf{L}|^2-|\mathbf{S}|^2)$$

代进 $|\mathbf{J}|^2=J(J+1)\hbar^2$, $|\mathbf{L}|^2=L(L+1)\hbar^2$, $|\mathbf{S}|^2=S(S+1)\hbar^2$,得到

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}[J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)]\hbar^2$$

13.6　当 $L=1$ 和 $S=\frac{1}{2}$,计算 $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ 的可能值.

解 ☞　从式(13.8),J 的可能值是

$$J=L+S=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\qquad J=L+S-1=|L-S|=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

从题 13.5

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}[J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)]\hbar^2$$

对于 $J=3/2$:

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)-1(1+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\hbar^2=\frac{1}{2}\hbar^2$$

对于 $J=1/2$

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-1(1+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\hbar^2=-\hbar^2$$

图 13-3 表示这三个矢量的相对定向.

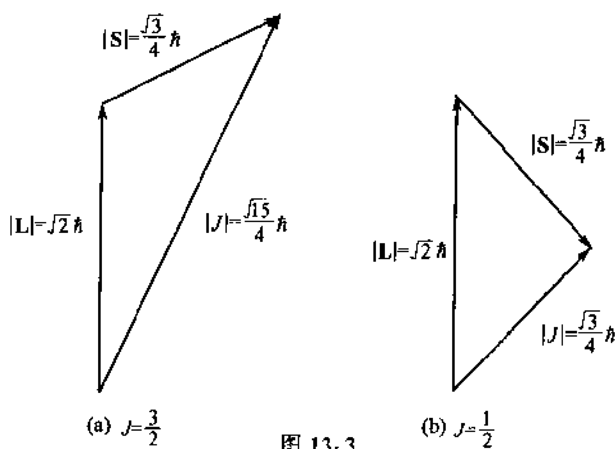


图 13-3

13.7　如果电子轨道运动的结果是产生钠 D 双线(5889.95Å,5895.92Å),估计轨道运动产生的磁场强度.

解 ☞　变换在 $L=1$ 和 $L=0$ 的态之间发生,只有 $L=1$ 的态是分裂的.在 $L=1$ 的子态之间的能量差可以从它的波长差得到,

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$|\mathrm{d}E| = \frac{hc\,|\mathrm{d}\lambda|}{\lambda^2} = \frac{(12.4\times10^3\mathrm{eV\cdot Å})(5.97\mathrm{Å})}{(5890\mathrm{Å})^2} = 2.13\times10^{-3}\mathrm{eV}$$

于是,

$$2.13\times10^{-3}\mathrm{eV} = 2\left(5.79\times10^{-5}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{T}}\right)B$$

$$B = 18.4\mathrm{T}$$

13.8　利用题 13.7 的信息及 $S=\frac{1}{2}$,求出题(13.6)中的 K 的值.

解 ☞　对于 $S=\frac{1}{2}$,有两个 $L=1$ 的态,它们是 $J=\frac{3}{2}$ 及 $J=\frac{1}{2}$.从题 13.6 我们有

$$J=\frac{3}{2}:\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}\hbar^2$$

$$J=\frac{1}{2}:\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=-\hbar^2$$

从题(13.6)我们有 $\Delta E_s = K(\mathbf{L\cdot S})_u - K(\mathbf{L\cdot S})_l$,或者

$$2.13\times10^{-3}\mathrm{eV} = K\left(\frac{1}{2}\hbar^2\right) - K(-\hbar^2) = K\left(\frac{3}{2}\hbar^2\right) = K\,\frac{3}{2}(0.658\times10^{-15}\mathrm{eV\cdot s})^2$$

解出,

$$K = 3.28\times10^{27}\,\frac{1}{\mathrm{eV\cdot s^2}}$$

补 充 习 题

13.9　在施特恩-格拉赫实验中,银原子在梯度为 60T/m 的非均匀磁场下横过 0.1m.如在收集底板上看到的间隔是 0.15mm,确定银原子的速度.银原子的质量是 1.79×10^{-25}kg.

答案:455m/s

13.10　当电子处在 0.5T 的磁场中时,在电子的两个自旋方向的能差是多少?

答案:5.79×10^{-5}eV

13.11　参照题 13.10.当电子"跳"过它的自旋时,确定所发出的辐射的波长.

答案:2.14cm

13.12　使得一个电子自旋"跳"过的波长是1.5cm.计算电子所在的磁场.

答案:0.714T

13.13　计算在 $L=3$, $S=\frac{1}{2}$时 J 的可能值.

答案:$\frac{7}{2}$;$\frac{5}{2}$

13.14　对题13.13,计算 $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$.

答案:$\frac{3}{2}\hbar^2$;$-2\hbar^2$

13.15　因为电子的轨道运动使得在钾中 $L=1$ 到 $L=0$ 的变换中观察到7664.1Å和7699.0Å双线,估计因电子轨道运动而产生的磁场强度.

答案:63.3T

13.16　如果 $S=\frac{1}{2}$,用题13.15的数据重复题13.8.

答案:$1.13\times10^{28}\frac{1}{\text{eV}\cdot\text{s}^2}$

第Ⅳ部分　多电子原子

第 14 章　泡利不相容原理

14.1　多于 1 个电子的量子力学系统

到现在我们考虑了具有多个能级但只有一个有效电子的量子力学系统，即类氢原子．我们得到在缺乏强的自旋-轨道耦合条件下，电子的行为可以由指定它的四个量子数（n，l，m_l，m_s）来描述，它们分别涉及能量，轨道角动量，轨道角动量的 z 分量和它的自旋的 z 分量．当给定了这四个量子数，就说这个（单电子）系统的态已经给定．

14.2　泡利不相容原理

当分析多于一个电子的原子的光谱数据时，W．泡利在 1924 年得出结论：在量子力学系统中没有两个电子可占据同样的状态．这个结果称为是泡利的不相容原理；换句话说，它表明没有两个电子可具有同样的量子数集合（n，l，m_l，m_s）．

泡利不相容原理与许多重要的原子结构实验相关，并且阐释了元素周期表，后者是第 15 章的主题．但为了例证泡利不相容原理，我们在这里讨论简单的问题，其中一个或几个质量为 m 的质点在一条直线上的点 0 及点 a 之间运动，即讨论在长度 a 的一维"箱子"中的质点．

14.3　在一维箱子中的单个质点

在一维箱子中的单个质点的问题曾在题 10.20 中解出．其中指出质点的能量不连续变化，而是只具离散的数值，它们是

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

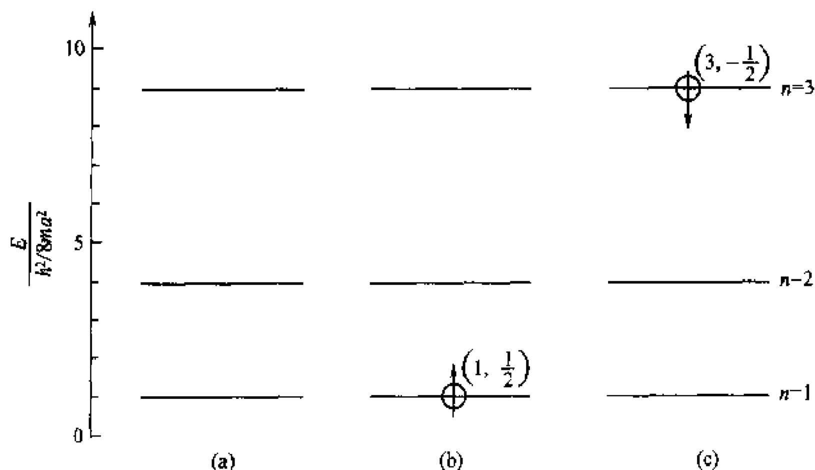


图 14-1

图 14-1(a)中画出了这些能级.现在我们取箱子中的质点是一个有内禀自旋的电子.系统的态由一对量子数(n, m_s)所指定.在图 14-1(b)中,电子是 $n=1$ 态,"自旋朝上"$\left(m_s=+\frac{1}{2}\right)$;在图 14-1(c)是 $n=3$ 态,"自旋朝下"$\left(m_s=-\frac{1}{2}\right)$.

14.4　在一维箱子中的多个质点

当在一维箱子有多于一个粒子时,在这种情况下泡利不相容原理有重要的影响.在下面假设在多于一个质点时能级并不改变.

在两个电子的情况,系统的基(最低能量)态在 $n=1$ 能级有两个电子,一个自旋朝上$\left(1,+\frac{1}{2}\right)$一个自旋朝下$\left(1,\ \ \frac{1}{2}\right)$,如图 12-2(a)所示.注意这两个电子并不具有相同的量子数集合(n, m_s).

现在当系统中加上第三个电子,我们看将发生了什么.泡利不相容原理禁止这个电子占据 $n=1$ 能级;因为如果它在 $n=1$ 能级,三个电子中的两个必定具有相同的量子数集合(n, m_s).因此第三个电子必须在不同的能级,如果系统处于基态,它在 $n=2$ 能级,图 14-2(b)所示的它处于自旋朝上的组态.

一个类似的思路指出第四个电子可处于 $n=2$ 的能级;但当加上第五个电子时,它必须处于 $n=3$ 能级,见图 14-2(c)所示,那里所示的是自旋朝下的组态.于是从这里看到泡利不相容原理具有增高系统基态的总能量以达到比所有的电子都处于 $n=1$ 能级时更要高的能量值.

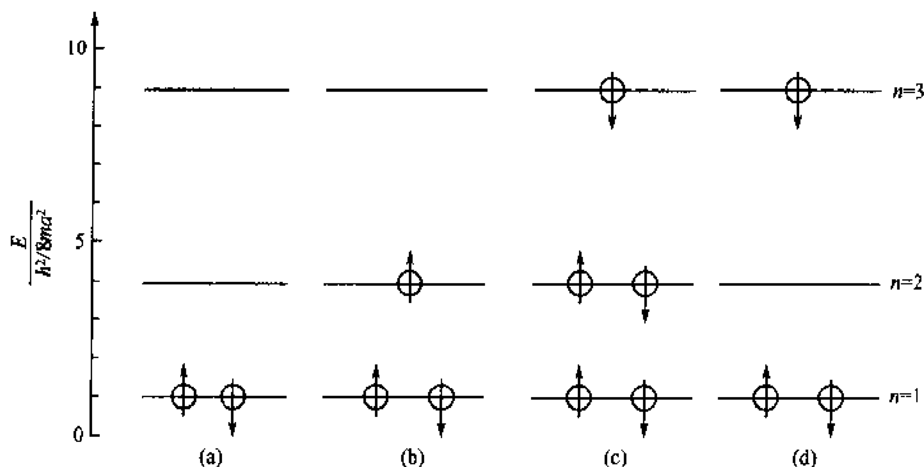


图 14-2

上述系统的激发态是指电子并没有全部占据所有的最低的可利用能级,图 14-2(d)所示的是三电子系统的激发态.作为单电子系统,当激发电子寻求它们的基态组态时有可能将能量以光子的形式放射出来.

例 题 详 解

14.1　当无相互作用电子处于1维长为6Å的方阱中时,计算它的前三个能级.

解　能级的公式是

$$E_n=\frac{n^2h^2}{8ma^2}=\frac{n^2(hc)^2}{8(mc^2)a^2}=\frac{n^2(12.4\times10^3\mathrm{eV}\cdot\text{Å})^2}{8(0.511\times10^6\mathrm{eV})(6\text{Å})^2}=1.04n^2\mathrm{eV}$$

于是 $E_1=1.04\mathrm{eV}$, $E_2=4.16\mathrm{eV}$, $E_3=9.36\mathrm{eV}$.

14.2　当图 14-3(a)的四电子系统回归它的基态时,发出的光子的能量是多少?

解 ☞　这系统回到基态的可能变换如图 14-3(b)和 14-3(c)所示.所射出的光子能量等于初始能级和终了能级之差.变换 B, C 和 D 有同样的能差因此给出同样能量的光子.

$$E_A = E_2 - E_1 = 4.16\text{eV} - 1.04\text{eV} = 3.12\text{eV}$$

$$E_B = E_C = E_D = E_3 - E_2 = 9.36\text{eV} - 4.16\text{eV} = 5.20\text{eV}$$

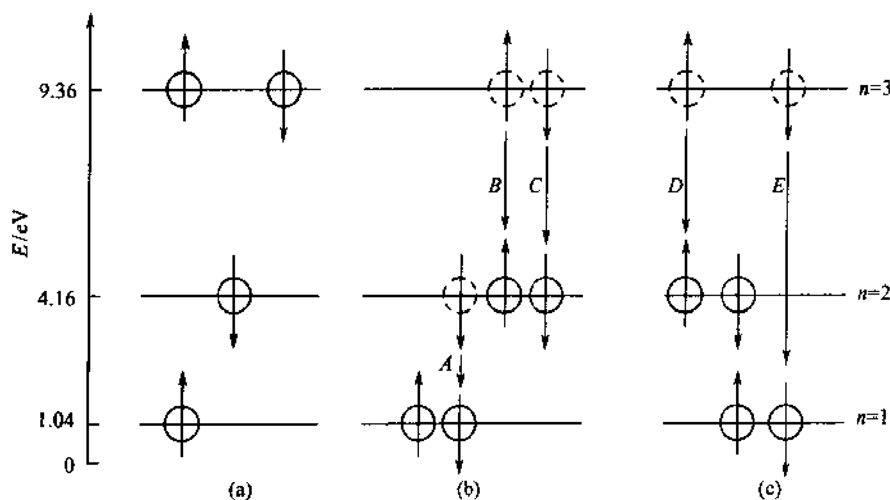


图 14-3

14.3　在一维无穷方阱中有三个无相互作用粒子[图 14-4(a)].当加上磁场并且与粒子的自旋相互作用时有什么情况出现?

解 ☞　加上外磁场之后,新的粒子能量值(E_t)等于原始能量值(E_n)加上相互作用能

$$E_t = E_n - \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} = E_n - \mu_{sz}B = E_n + m_s \frac{e\hbar}{m}B$$

(参照题 13.7).因为 $m_s = \pm\frac{1}{2}$,新能级是旧能级加上 $\Delta E = \pm e\hbar B/2m$ 之后的结果自旋 $-\frac{1}{2}$粒子占有低的子能级而自旋 $+\frac{1}{2}$粒子占有高的子能级[图 14-4(b)].对照无磁场情况,如果系统处于基态,在 $n=2$ 能级的粒子将有自旋 $-\frac{1}{2}$.

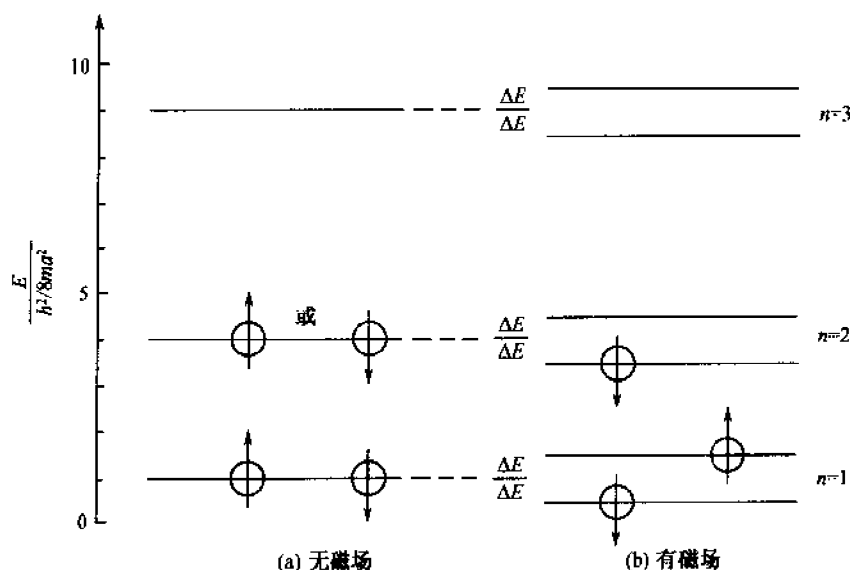


图 14-4

14.4　在长度为 a 的一维无穷方势阱中每束有 5×10^9 个电子，如果全部最低能级是填满了的，确定最大能量电子的能量.

解 ☞ 因为每个能级有两个电子，电子从低到高填到最后第 n 能级的总数是 $N=2n$. 单位长度上电子的数目是

$$\frac{N}{a}=\frac{2n}{a}=5\times10^9\mathrm{m}^{-1}$$

所以

$$\frac{n}{a}=(2.5\times10^9\mathrm{m}^{-1})\left(10^{-10}\frac{\mathrm{m}}{\text{Å}}\right)=0.25\text{Å}^{-1}$$

第 n 能级的能量是

$$E_n=\frac{n^2h^2}{8ma^2}=\left(\frac{n}{a}\right)^2\frac{(hc)^2}{8(mc^2)}=(0.25\text{Å}^{-1})^2\frac{(12.4\times10^3\mathrm{eV}\cdot\text{Å})^2}{8(0.511\times10^6\mathrm{eV})}=2.35\mathrm{eV}$$

14.5　如果核可用一维方势阱近似，这里每 10^{-15}m 有一个中子. 在这种近似下确定最大能量中子的能量. 中子的静止质量是 938MeV.

解 ☞　参照题 14.4

$$\frac{N}{a}=\frac{2n}{a}=10^{15}\mathrm{m}^{-1}$$

$$\frac{n}{a}=(0.5\times10^{15}\mathrm{m}^{-1})\left(10^{-10}\frac{\mathrm{m}}{\text{Å}}\right)=0.5\times10^5\text{Å}^{-1}$$

$$E_n=\left(\frac{n}{a}\right)^2\frac{(hc)^2}{8(mc^2)}=(0.5\times10^5\text{Å}^{-1})^2\frac{(12.4\times10^3\mathrm{eV}\cdot\text{Å})^2}{8(938\times10^6\mathrm{eV})}=51.2\times10^6\mathrm{eV}=51.2\mathrm{MeV}$$

补 充 习 题

14.6　在题 14.1 的无穷方势阱中，从 $n=3$ 到 $n=2$ 转换而发出光子，光子的能量是多少？

答案：5.20eV

14.7　一维无穷方势阱有长度 10^{-14}m，中子（$m_n=938$MeV）在这个阱中的前三个能级是多少？

答案：2.05MeV；8.20MeV；18.45MeV

14.8　对于 1Å 阱中的电子重复题 14.7.

答案：37.6eV；150eV；338eV

14.9　对于中子重复题 14.2.

答案：615MeV；1024MeV；1634MeV

14.10　如果磁场是 2T，要使题 14.3 中的最高能量电子“转过”它的自旋，确定所需要的能量.

答案：2.32×10^{-4}eV

第 15 章　多电子原子和周期表

15.1　原子中电子组态的光谱标记

多电子原子态特点的大量信息可以由作一级近似的方式得出，这里的一级近似是每个电子在核场和其他电子所产生的平均场中独立运动．其余的相互作用将分别处理，在下面讨论．在这样一个独立的粒子模型下，量子数 n，l，m_l 和 m_s 将用来描述每一个电子态．

对于一个给定的 n，量子数 l 的整数值可以取作

$$l = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

l 的数值按照下列的规则由位于下一行的字母表示

l 的值	0	1	2	3	4	5	…
字母记号	s	p	d	f	g	h	…

对于在指定的由量子数(n, l)标记的轨道的电子数目，习惯地是先给定 n，然后跟着一个标记 l 的字母，而电子数写在右上角．不同的轨道依次写出，这样就定义了一个电子组态．例如，硼的基底态的 5 个电子的组态是 $1s^2 2s^2 2p^1$．

具有相同 n 值的电子称为占有同样的电子壳层．不同的壳层用不同的大写字母标记，其对应关系如下：

n 的值	1	2	3	4
壳层字母	K	L	M	N

在给定的壳层内可以有不同的 l 值；每一个 l 值定义一个子壳层（因此它等价于一个轨道）．例如，在硼的基态组态，$1s^2 2s^2 2p^1$，中，有两个电子在 s 子壳层中，而有一个电子在 L 壳层的 p 子壳层中．

15.2　周期表和原子壳层模型

对于多电子原子的最低能量态，或基态的电子组态可以用泡利不相容原理及原子壳层模型加以阐释．泡利原理指出，没有两个电子可以有相同的量子数集合(n, l, m_l, m_s)．于是，对于给定的子壳层(n, l)，m_l 和 m_s 的组合数给出在这个子壳层的最大电子数．

对于每一个 l 值，这里有 $2l+1$ 个 m_l 值，而对于每一 l 和 m_l 值对应有两个 m_s 值 $\left(m_s = \pm\frac{1}{2}\right)$．于是可以填入一个子壳层而不违背泡利不相容原理的最大电子数是 $2(2l+1)$，见下表

l 的值	0	1	2	3
子壳层的字母记号	s	p	d	f
最大的电子数	2	6	10	14

对于最大多数原子不同子壳层的填充顺序可以由图 15-1 由下到上读出．这个图也指出在任何指定原子中电子的相对能量．从图 15-1 看到，间隙出现在 $Z = 2, 10, 18, 36, 54$ 和 86 上，它们是惰性气体，或者说是稀有气体，它们化学上不活泼并且难于离解．除了 He$(Z=2)$之外，能量间隙出现在 p 子壳层完全填满之后．元素周期表的其他性质也可以用不同子壳层的充填方式加以说明，见例题详解．

壳层	能级	最大电子数	总电子数
P	6p	6	86
	5d	10	
	4f	14	
	6s	2	
O	5p	6	54
	4d	10	
	5s	2	
N	4p	6	36
	3d	10	
	4s	2	
M	3p	6	18
	3s	2	
L	2p	6	10
	2s	2	
K	1s	2	2

图 15-1

15.3　原子态的光谱标记

每一个原子态由给定的量子数 L,S,J 标记，它们分别相应于原子总轨道角动量，总自旋角动量，和总角动量(见 13.5 节)．

原子态中 L 的值在光谱标记用大写字母标记，对应规则如下

L 的值	0	1	2	3	4	5	…
字母记号	S	P	D	F	G	H	…

原子态的标记方法是：L 的字母记号，$2S+1$ 的数值位于左上角，而 J 的记号在右下角．例如，硼的基底态 $L=1$, $S=\dfrac{1}{2}$, $J=\dfrac{1}{2}$，而光谱标记为 $^2P_{1/2}$．

15.4　原子激发态和 LS 耦合

多电子原子态的数学分析是复杂的，因为除了电子和核的库仑相互作用而外，还有各自电子间的剩余库仑相互作用，有电子轨道动量矩和电子自旋之间的相互作用，和不同电子自旋之间的相互作用．对于轻的和中等重量的原子，在 1925 年由罗素和桑德斯提出一种称为 LS 耦合的方案，它提供了了解所观察原子态的一种方法．对于 LS 耦合，原子的轨道角动量 $\mathbf{L}$ 是各个电子的轨道角动量的矢量和，

$$\mathbf{L}=\sum_i \mathbf{L}_i \tag{15.1}$$

类似地，原子的自旋动量矩 $\mathbf{S}$ 是各个电子的自旋动量矩的矢量和，

$$\mathbf{S}=\sum_i \mathbf{S}_i \tag{15.2}$$

于是，原子的总动量矩是，如同 13.5 节，

$$\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S} \tag{15.3}$$

这三个原子动量矩是量子化的，有关系

$$|\mathbf{L}|^2=L(L+1)\hbar^2,\ |\mathbf{S}|^2=S(S+1)\hbar^2,\ |\mathbf{J}|^2=J(J+1)\hbar^2 \tag{15.4}$$

并且其 z 分量也是量子化的，有关系

$$L_z = M_L\hbar,\quad S_z = M_S\hbar,\quad J_z = M_J\hbar \tag{15.5}$$

z 分量量子数与各个电子之间的有下述相加规则：

$$M_L = \sum_i (m_l)_i,\quad M_S = \sum_i (m_s)_i,\quad M_J = M_L + M_S \tag{15.6}$$

M_L, M_S, M_J 与 L, S, J 有关系

$$M_L = L, L-1, L-2, \cdots, -L \tag{15.7}$$

$$M_S = S, S-1, S-2, \cdots, -S \tag{15.8}$$

$$M_J = J, J-1, J-2, \cdots, -J \tag{15.9}$$

可以将原子激发到基态以上的能级.当落回基底时,原子将放出相应线谱的辐射.对于强变换,下述选择定则适用：

$$\Delta J = 0, \pm 1 (\text{但 } J = 0 \to J = 0 \text{ 禁戒})$$

$$\Delta L = 0, \pm 1,\quad \Delta S = 0,\quad \Delta M_J = 0, \pm 1 (\text{如果 } \Delta J = 0, M_J = 0 \to M_J = 0 \text{ 禁戒})$$

这些是电偶极子变换;另外各种变换的强度很弱.如果电偶极子变换只包含一个电子,$\Delta L \neq 0$.

15.5　反常塞曼效应

在半经典图像中,正常塞曼效应(三重线劈裂)与原子磁矩 **μ** 在外磁场 **B** 的进动有关(题12.2).磁场越强,进动越快,零场线所分裂的三条频谱线的间隔就越大.当 **L**·**S** 相互作用比起 **L** 或 **S** 与 **B** 的相互作用都强的时候,于是 **S** 和 **L** 围绕着 **J** 快速进动,产生了 **μ** 围绕着 **J** 的快速进动;然后整个系统围绕 **B** 作慢速进动.这时会出现反常塞曼效应,它的强度与 **μ** 沿 **J** 的分量有关.在题15.15到15.19中指出反常塞曼分裂产生的频谱线多于三条.

例题详解

15.1　证明在 LS 耦合下,总角动量量子数有(13.8)所给的数值,即

$$J = L+S, L+S-1, L+S-2, \cdots, |L-S|$$

证 ☞　由式(15.7)和(15.8)

$$M_L = L, L-1, L-2, \cdots, -(L-2), -(L-1), -L$$

$$M_S = S, S-1, S-2, \cdots, -(S-2), -(S-1), -S$$

而 M_J 有关系 $M_J = M_L + M_S$.

假定 $L \geqslant S$,表15-1的第(1)行给出 M_J 的计算值,而第(2)行给出每一个 M_J 的(M_L, M_S)组合数.例如,$L+S-2$ 的多重性是3,因为

$$L+S-2 = \begin{cases}(L)+(S-2)\\(L-1)+(S-1)\\(L-2)+(S)\end{cases}$$

可以看到多重性的和是

$$2(1+2+3+\cdots+2S) + (2S+1)[2(L-S)+1]$$

$$= 2\frac{2S(2S+1)}{2} + (2S+1)(2L-2S+1) = (2S+1)(2L+1)$$

这也是(M_L, M_S)组合的总数

所要求的 J 值有性质:对于每一个 J 值,M_J 的对应取值范围是

$$M_J = J, J-1, \cdots, -(J-1), -J$$

表 15-1

(1)	M_J 值	$L+S$	$L+S-1$	…	$L-S+1$	$L-S$	…	$-(L-S)$	$-(L-S+1)$	…	$-(L+S-1)$	$-(L+S)$
(2)	多重性	1	2	(每步 +1)	$2S$	$2S+1$	(常数)	$2S+1$	$2S$	(每步 -1)	2	1
(3) 对指定关系的多重性	$J=L+S$	1	1	…	1	1	…	1	1	…	1	1
	$J=L+S-1$		1	…	1	1	…	1	1	…	1	
	⋮				⋮	⋮		⋮	⋮			
	$J=L-S+1$				1	1	…	1	1			
	$J=L-S$					1	…	1				
(4)	其他的未加指定的多重性	0	0	…	0	0	…	0	0	…	0	0

表 15-1 的行(3)和行(4)指明这些数值：

$$J = L+S, L+S-1, \cdots, L-S = |L-S|$$

这样刚好取尽了(M_L, M_S)的组合.

当 $S \geqslant L$，只需要在上述讨论中简单地交换 L 和 S.

15.2　求出可以占据 d 子壳层的最大电子数.

解 ☞　对于 d 壳层，$l=2$. 如同 15.2 节所示，在这个子壳层的最大电子数是

$$2(2l+1) = 2(2\times 2+1) = 10$$

表 15-2 中列出对应的 m_l 和 m_s 的 10 个组合.

表 15-2

l	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
m_l	2	2	1	1	0	0	-1	-1	-2	-2
m_s	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

15.3　证明由量子数 n 指定的壳层中的最大电子数是 $2n^2$.

证 ☞　在给定 l 的子态数是 $2(2l+1)$. 而 l 的值是

$$l = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

所以填满 n 壳层的电子数是

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2[1+3+\cdots+(2n-1)]$$

我们定义

$$S = 1+3+\cdots+(2n-1)$$

将和式反向写出是

$$S = (2n-1)+(2n-3)+\cdots+1$$

将这两个表达式逐项相加有

$$2S = 2n+2n+\cdots+2n = (2n)n$$

于是，$N = 2S = 2n^2$.

15.4　证明由填满的子壳层复合而成的原子有基底态 $^1S_0$.

证 ☞　原子总轨道角动量的 z 分量 $M_l\hbar$，以及总自旋角动量的 z 分量 $M_s\hbar$，满足关系

$$M_L = \sum m_l, \qquad M_s = \sum m_s$$

这里求总和遍及于所有电子. 在完全 l 子壳层电子具有下述的 m_l 和 m_s 值：

$$(m_l, m_s) = \left(l, \pm\frac{1}{2}\right), \left(l-1, \pm\frac{1}{2}\right), \cdots, \left(-l, \pm\frac{1}{2}\right)$$

于是，对原子中所有电子求和得出 $M_L=0$ 和 $M_S=0$. 因为这是 M_L 和 M_S 的仅有可能值，我们只能有 $L=0$ 和 $S=0$，从而又包含着 $J=0$. 这个态因此是 $^1S_0$.

15.5　图 15-2 所示的是氢($l=L$)的能量态,对于这些态的可能电偶极子变换是什么?

解 ☞　这个变换要满足选择定则 $\Delta l=\pm 1$. 所允许的变换见图 15-3.

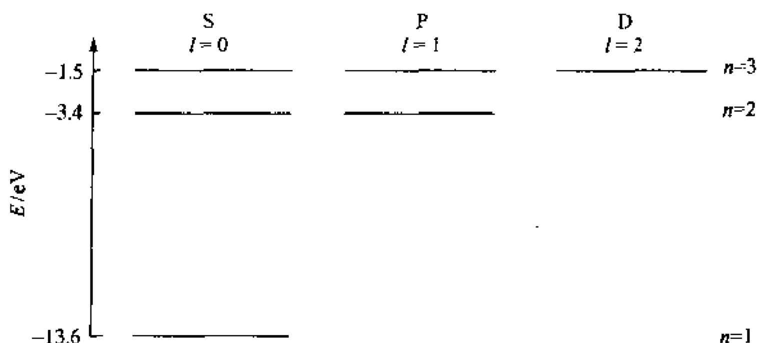


图 15-2

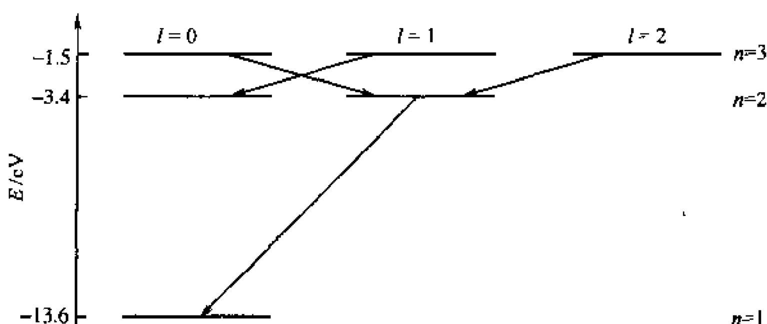


图 15-3

15.6　对于态$^3F_2$ 计算 **L·S**

解 ☞　对于$^3F_2$ 态, $S=1$, $L=3$ 和 $J=2$. 从题 13.5 的结果我们有

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}[J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)]$$
$$=\frac{1}{2}[2(2+1)-3(3+1)-1(1+1)]\hbar^2=-4\hbar^2$$

15.7　当 **L·S** 相互作用存在时,确定从^{3}F 态到^{3}D 态所产生的变换.

解 ☞　自旋-轨道耦合分裂的相对大小与

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}[J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)]$$

有关. 看表 15-3, 其中 J 由(13.8)求得.

本处, **L·S** 相互作用将每一个能级分裂为三条, 如图 15-4. 变换满足选择定则 $\Delta J=0,\pm 1$(但是排除 0→0 情况)也已在图中显示出来. 变换规则 $\Delta L=\pm 1$ 自动满足.

表 15-3

态	L	S	J	**L·S**
^{3}F	3	1	4, 3, 2	$3\hbar^2$, $-1\hbar^2$, $-4\hbar^2$
^{3}D	2	1	3, 2, 1	$2\hbar^2$, $-1\hbar^2$, $-3\hbar^2$

15.8　假设^{3}Li 原子是类氢的, 确定 2s 电子的离解能量. 定性解释与实验值 5.39eV 的差异.

解 ☞　如果两个内层电子可以忽略, 价电子位于 $n=2$ 玻尔轨道但 $Z=3$. 从式(11.5),

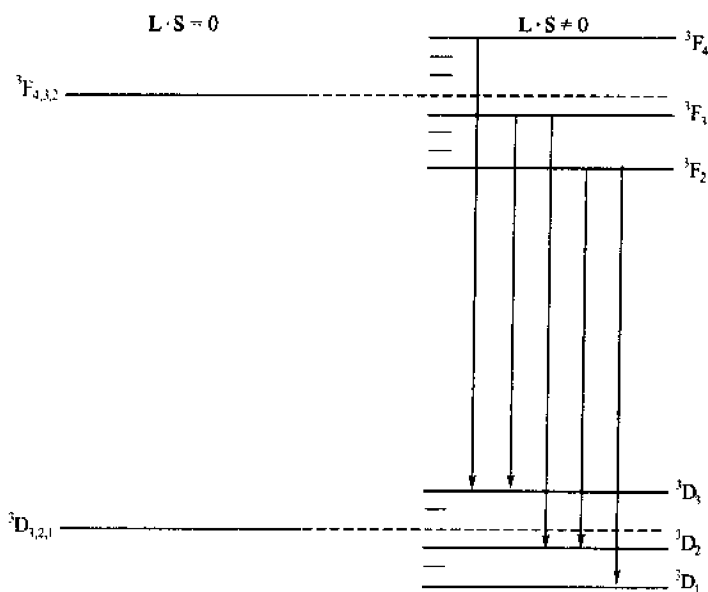


图 15-4

$$E_n = -\frac{(13.58)Z^2}{n^2}\text{eV} \text{ 所以 } E_2 = -\frac{(13.58)(3)^2}{2^2}\text{eV} = -30.6\text{eV}$$

所以离解能量是 30.6eV. 另外, 如果我们认为两个内部电子完全屏蔽了 ^{3}Li 核, 所以外部电子只能看到 $Z = 1$, 于是

$$E_2 = -\frac{13.58}{2^2}\text{eV} = -3.4\text{eV}$$

这时离解能量是 3.4eV. 实际结果是 5.39eV, 在这两个值之间. 这说明价电子可钻进氦化内核, 并且经受了部分但非全部的核电荷. 内层电子部分地屏蔽了作用于价电子的核电荷.

15.9　测量到 He 的离解能量是 $E_M = 24.60$eV. He 原子中的普通结合能由假设每个电子在玻尔轨道中独立运动而求得. 而原子中两个电子之间相互作用能定义为普通结合能与所测到的离解能之差. 确定这个相互作用能.

解 ☞　按照玻尔理论, 在电荷为 Ze 的核电荷场中一个电子的基态能量是[见式(11.5)]

$$E_1 = -Z^2(13.58\text{eV})$$

对于 He, $Z = 2$, 所以, 如果每个电子看作是与其他电子完全独立的, 由玻尔理论, 它的结合能是

$$E_B = -E_1 = (2)^2(13.58\text{eV}) = 54.32\text{eV}$$

而相互作用能是

$$E_i = E_B - E_M = 54.32\text{eV} - 24.60\text{eV} = 29.72\text{eV}$$

相互作用能是正的, 因为两个电子之间的力是排斥力.

15.10　计算题 15.9 中电子的平均间隔.

解 ☞　如果认为相互作用能 $E_i = 29.72$eV 来自两个电子之间的库仑力, 平均距离 d 应当满足关系

$$E_i = k\frac{e^2}{d}$$

$$(29.72\text{eV})\left(1.60\times10^{-19}\frac{\text{J}}{\text{eV}}\right) = \left(8.998\times10^9\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}\right)\frac{(1.60\times10^{-19}\text{C})^2}{d}$$

解出　$d = 0.484\times10^{-10}\text{m} = 0.484\text{Å}$.

15.11　给出前 5 个稀有气体的电子组态.

解 ☞　稀有气体是指具有完全填满有关壳层的元素, 见图 15-1. 前 5 个稀有气体的电子组态见表 15-4.

表 15-4

稀有气体	电子组态	原子序(Z)
He	$1s^2$	2
Ne	$1s^22s^22p^6$	10
Ar	$1s^22s^22p^63s^23p^6$	18
Kr	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^6$	36
Xe	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^6$	54

15.12 碱金属比起稀有气体来多一个电子.给出前 4 个碱金属的电子组态.

解 ☞ 当完全填满一个指定的 np 子壳层(即在指定 n 下的 p 子壳层),对应了一个稀有气体,下一个较高的 Z 原子将有 $(n+1)s$ 电子加在稀有气体式核上,见表 15-4.于是我们有基底态电子组态,见表 15-5.

表 15-5

碱金属	电子组态	稀有气体式核
Li($Z=3$)	$1s^22s^1$	He
Na($Z=11$)	$1s^22s^22p^63s^1$	Ne
K($Z=19$)	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^1$	Ar
Rb($Z=37$)	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^1$	Kr

因为碱金属在相对惰性的核上加了一 s 电子,它们的频谱与氢原子的定性上类似,而基底态全是 $^2S_{1/2}$.

15.13 卤素族的成员比起稀有气体来少了一个电子.给出前三个卤素的电子组态.

解 ☞ 在比稀有气体低一个 Z 的单原子中,参见表 15-4,这个"丢掉"的电子(H 除外)是一个 np 电子.基态电子组态见表 15-6.

表 15-6

卤素	电子组态
F($Z=9$)	$1s^22s^22p^5$
Cl($Z=17$)	$1s^22s^22p^63s^23p^5$
Br($Z=35$)	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^5$

15.14 填完 4s 子壳层之后,开始填 3d 子壳层.因此有 10 个元素形成了所谓过渡元素.给出前三个过渡族元素的电子组态.

解 ☞ 见表 15-7.

表 15-7

过渡元素	电子组态
Sc($Z=21$)	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^1$
Ti($Z=22$)	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^2$
V($Z=23$)	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^3$

15.15 已知

$$\boldsymbol{\mu}_L=-\left(\frac{e}{2m}\right)\mathbf{L}\quad 和\quad \boldsymbol{\mu}_S=-2\left(\frac{e}{2m}\right)\mathbf{S}$$

用矢量图证明 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\mathbf{J}$ 是不平行的.

证 ☞　矢量关系 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ 和 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S$ 表示在图 15-5 上. 因为

$$\frac{|\boldsymbol{\mu}_S|}{|\mathbf{S}|} = 2\frac{|\boldsymbol{\mu}_L|}{|\mathbf{L}|}$$

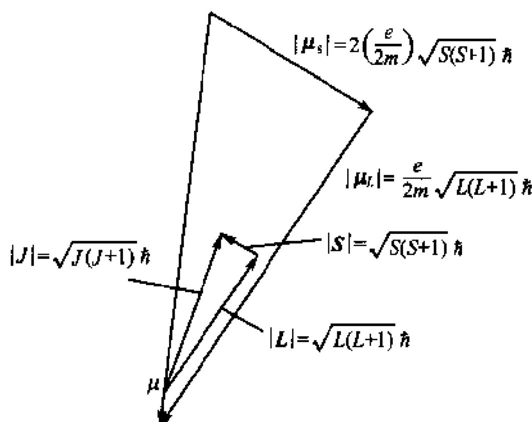


图 15-5

这两个三角形不相似,而 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\mathbf{L}$ 不平行.

15.16　参照题 15.15,算出总磁矩矢量 $\boldsymbol{\mu}$ 在矢量 $\mathbf{J}$ 上的投影.

解 ☞　从题 15.15,

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{2m}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = -\frac{e}{2m}(\mathbf{J} + \mathbf{S})$$

$\boldsymbol{\mu}$ 到 $\mathbf{J}$ 上的投影是

$$\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} = \left(-\frac{e}{2m}\right)\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{J}\cdot\mathbf{S}}{|\mathbf{J}|}$$

现在

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = (\mathbf{J} - \mathbf{S})\cdot(\mathbf{J} - \mathbf{S}) = \mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{S} - 2\mathbf{J}\cdot\mathbf{S}$$

或者

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{S} - \mathbf{L}\cdot\mathbf{L})$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} &= \left(-\frac{e}{2m}\right)\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{2}(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{S} - \mathbf{L}\cdot\mathbf{L})}{|\mathbf{J}|} \\
&= \left(-\frac{e}{2m}\right)\frac{J(J+1)\hbar^2 + \frac{1}{2}[J(J+1)\hbar^2 + S(S+1)\hbar^2 - L(L+1)\hbar^2]}{\sqrt{J(J+1)}\hbar} \\
&= \left(-\frac{e\hbar}{2m}\right)\sqrt{J(J+1)}\left[1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}\right] \\
&= \left(-\frac{e\hbar}{2m}\right)\sqrt{J(J+1)}\,g
\end{aligned}$$

量

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

称为朗德 g 因子. 我们将在下一个问题中看到,在弱磁场中计算不同能级的分裂需要 g 因子.

15.17　假设能级的分裂只与 $\boldsymbol{\mu}$ 沿 $\mathbf{J}$ 的投影有关,求出一个原子在磁场 B 中的分裂值.

解 ☞　从题 15.16, $\boldsymbol{\mu}$ 沿 $\mathbf{J}$ 的分量是

$$\mu_J = \left(-\frac{e\hbar}{2m}\right)\sqrt{J(J+1)}\,g$$

或者用矢量标记

$$\mu_J = \mu_J \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} = \left(-\frac{e\hbar}{2m}\right)\sqrt{J(J+1)}g\frac{\mathbf{J}}{\sqrt{J(J+1)}\hbar} = -\frac{e}{2m}g\mathbf{J}$$

能量分裂由式(13.5)给出，是

$$\Delta E = -\mu_J \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m}g\mathbf{J}\cdot\mathbf{B} = \frac{e}{2m}gBJ_z = \frac{e}{2m}gBM_J\hbar$$

因为 $M_J = J, J-1, \cdots, -J+1, -J$，因此对于一个给定场 B，能级将分裂为 $2J+1$ 个子能级，而分裂的程度由该能级的 g 因子确定.

15.18 设 **L·S** 相互作用比外部磁场作用强得多，计算在 0.05T 场下的氢原子的最低态($^2S_{1/2}$, $^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$)的反常塞曼分裂.

解 ☞ 从题 15.17，我们有

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2m}gBM_J = \left(5.79\times10^{-5}\frac{\text{eV}}{\text{T}}\right)g(0.05\text{T})M_J$$

其中

$$g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$$

表 15-8 中列出上面的计算.

表 15-8

态	L	S	J	g	M_J	ΔE, eV×10^{-5}
$^2P_{3/2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\pm\frac{3}{2}$	±0.579
					$\pm\frac{1}{2}$	±0.193
$^2P_{1/2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\pm\frac{1}{2}$	±0.097
$^2S_{1/2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\pm\frac{1}{2}$	±0.290

15.19 参照题 15.18，确定在 0.05T 磁场下氢原子中 $^2P_{3/2}\to{}^2S_{1/2}$ 和 $^2P_{1/2}\to{}^2S_{1/2}$ 的变换谱线. 在无磁场时这些变换分别给出 $(1210-3.54\times10^{-3})$Å 和 $(1210+1.77\times10^{-3}$Å$)$ 谱线.

解 ☞ 在所加磁场下，在谱线分裂之间的关系是

$$E_u - E_l = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{或} \quad \mathrm{d}E_u - \mathrm{d}E_l = -\frac{hc}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$$

或

$$\mathrm{d}\lambda = -\frac{\lambda^2}{hc}(\mathrm{d}E_u - \mathrm{d}E_l) = \frac{(1210\text{Å})^2}{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}(\mathrm{d}E_u - \mathrm{d}E_l) = \left(-118\frac{\text{Å}}{\text{eV}}\right)(\mathrm{d}E_u - \mathrm{d}E_l)$$

$\mathrm{d}E_u$ 和 $\mathrm{d}E_l$ 的值在表 15-9 中列出. 这里有满足定则 $\Delta M_J = \pm1, 0$ 的 10 种变换(见图 15-6). 这些线对 $\lambda_0 = 1210$Å 的偏离量已算得见表 15-9

表 15-9

$\mathrm{d}\lambda_0$, Å×10^{-3}	变换	$\mathrm{d}E_u$, eV×10^{-5}	$\mathrm{d}E_l$, eV×10^{-5}	$\mathrm{d}\lambda$, Å×10^{-3}	$\mathrm{d}\lambda_T = \mathrm{d}\lambda_0 + \mathrm{d}\lambda$, Å×$10^{-3}$
−3.54	a	+0.579	+0.290	−0.341	−3.88
−3.54	b	+0.193	+0.290	+0.114	−3.43
−3.54	c	+0.193	−0.290	−0.570	−4.11
−3.54	d	−0.193	+0.290	+0.570	−2.97
−3.54	e	−0.193	−0.290	−0.114	−3.65
−3.54	f	−0.579	−0.290	+0.341	−3.20
1.77	g	+0.097	+0.290	+0.228	+2.00
1.77	h	+0.097	−0.290	−0.457	+1.31
1.77	i	−0.097	+0.290	+0.457	+2.23
1.77	j	−0.097	−0.290	−0.228	+1.54

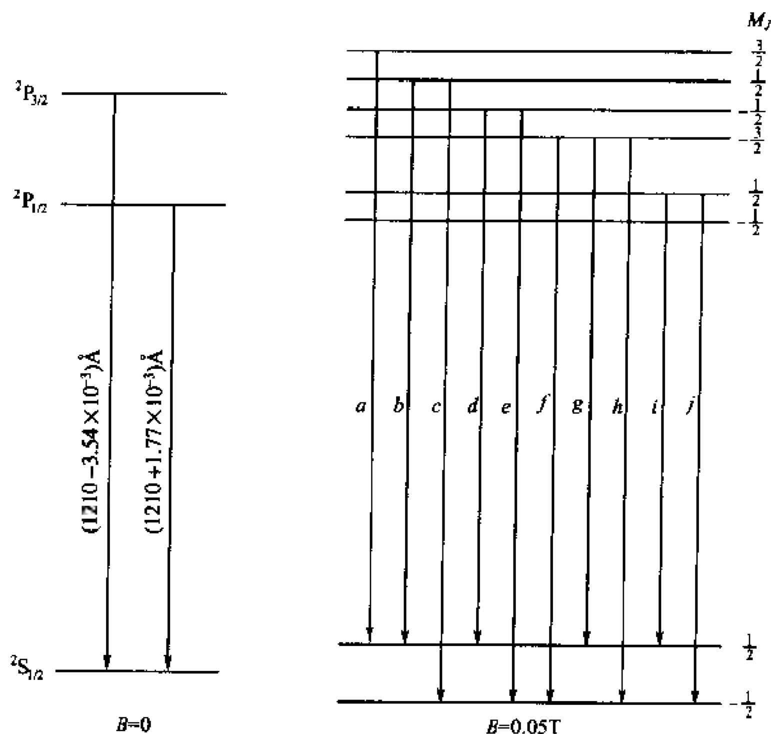


图 15-6

这个问题表明在反常塞曼效应中观察到 10 条线而在正常塞曼效应下只有 3 条线.

15.20 在 5T 的强外场下,略去自旋-轨道相互作用,确定在氢中从 2p→1s 变换下的谱线(λ_0 = 1210Å).

解 总磁矩是轨道磁矩和自旋磁矩的矢量和

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_L+\boldsymbol{\mu}_S=-\frac{e}{2m}\mathbf{L}-2\frac{e}{2m}\mathbf{S}=-\frac{e}{2m}(\mathbf{L}+2\mathbf{S})$$

如果略去自旋-轨道相互作用,系统能量的变化只与总磁矩和外磁场的相互作用有关,有

$$dE=-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}=-\mu_zB=\frac{e}{2m}(L_z+2S_z)B$$

$$=\frac{e\hbar}{2m}(M_L+2M_S)B=\left(5.79\times10^{-5}\frac{\text{eV}}{\text{T}}\right)(5\text{T})(M_L+2M_S)$$

$$=(28.94\times10^{-5}\text{eV})(M_L+2M_S)$$

所得的分裂在表 15-10 中给出.

表 15-10

态	L	M_L	M_S	M_L+2M_S	dE, eV×10^{-5}
2p	1	+1	$+\frac{1}{2}$	+2	+57.88
2p	1	0	$+\frac{1}{2}$	+1	+28.94
2p	1	-1	$+\frac{1}{2}$	0	0.00
2p	1	+1	$-\frac{1}{2}$	0	0.00
2p	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-28.94
2p	1	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	-57.88
1s	0	0	$+\frac{1}{2}$	+1	+28.94
1s	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-28.94

波长的变化从题 15.19 中找出，是

$$d\lambda = \left(-118\ \frac{\text{Å}}{\text{eV}}\right)(dE_u - dE_l)$$

因为上部能级的间隔与下部能级的间隔是相同的(28.94×10^{-5}eV)，满足选择定则 $\Delta M_L = \pm1, 0$，$\Delta M_S = 0$ 的变换结果只有三条线(看图 15-7 和表 15-11).

从这里看到在强外部磁场下，自旋-轨道相互作用可以忽略，人们有类似于正常塞曼效应的情况，其中只有三条线.

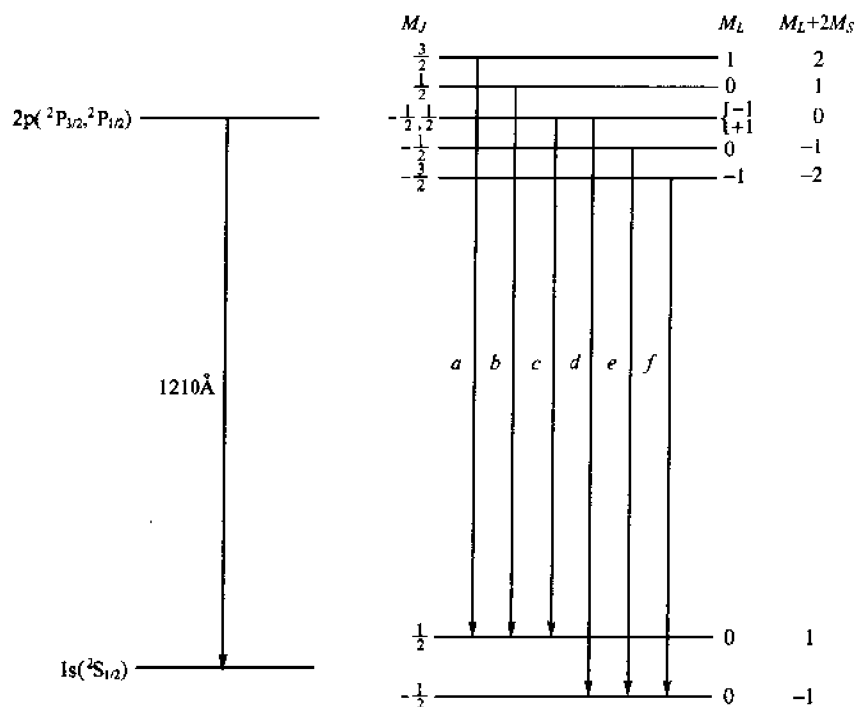


图 15-7

表 15-11

变换	$dE_u - dE_l$, eV$\times10^{-5}$	$d\lambda$, Å$\times10^{-3}$	$\lambda - \lambda_0 + d\lambda$, Å
a, d	28.94	−34.15	$1210-34.15\times10^{-3}$
b, e	0	0	1210
c, f	−28.94	+34.15	$1210+34.15\times10^{-3}$

补充习题

15.21　设原子态由一个单电子确定. 问在(a) S 态；(b) P 态；(c) D 态中，原子的总角动量的可能值是什么？

答案：(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$；(b) $\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$；(c) $\frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$, $\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$

15.22　求出占有 p 子壳层的最大电子数.

答案：6 个电子

15.23　求出可以占据 f 子壳层的最大电子数，并且对于电子标出 m_l 和 m_s 值.

答案：14 个电子；$m_l = \pm3, \pm2, \pm1, 0$；$m_s = \pm\frac{1}{2}$

15.24　计算 $^2D_{3/2}$ 态的 $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$.

答案：$-\frac{3}{2}\hbar^2$

15.25　对下述各态(a) $L=0, S=0, J=0$；(b) $L=2, S=0, J=2$；(c) $L=3, S=\frac{1}{2}$；$J=\frac{5}{2}$；(d) $L=4, S=1, J$

=5 给出光谱标记.

答案:(a)$^1S_0$;(b)$^1D_2$;(c)$^2F_{5/2}$;(d)$^3G_5$

15.26　在 L·S 相互作用存在的条件下,给出^{2}D 态到^{2}P 态的强变换.

答案:$^2D_{5/2}\to{}^2P_{3/2}$;

$^2D_{3/2}\to{}^2P_{3/2}$;$^2D_{3/2}\to{}^2P_{1/2}$

15.27　填满 6p 子壳层的稀有气体是什么?

答案:$_{86}$Rn≡Rn(Z=86)

15.28　给出建立在 Xe 稀有气体实上的碱金属的电子组态.

答案:$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^66s^1$($_{55}$Cs)

15.29　碱土类比稀有气体多两个电子.给出它们中前四个的电子组态.

答案: Be(Z=4):　$1s^22s^2$

Mg(Z=12):　$1s^22s^22p^63s^2$

Ca(Z=20):　$1s^22s^22p^63s^23p^64s^2$

Sr(Z=38):　$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^2$

15.30　给出电子比稀有气体 Xe 少一个的卤素元素的电子组态.

答案:$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^5$($_{53}$I)

15.31　过渡族的那一个元素具有组态 $1s^22s^22p^63s^23p^63d^64s^2$?

答案:$_{26}$Fe

15.32　原子的一个态具有封闭核再加一个 d 电子,给出这个可能态的光谱标记.

答案:$^2D_{5/2}$;$^2D_{3/2}$

15.33　列出两个等价 nd 电子的可能(M_L, M_S)态.

答案:量子数的 45 个可允许组合(10 个对象取 2 的组合数)中有 23 个态:(±4,0),(±3,1),(±3,0),(±3,−1),(±2,1),(±2,0),(±2,−1),(±1,1),(±1,0),(±1,−1),(0,1),(0,0),(0,−1)

15.34　对于 2T 磁场,计算在 Na 中$^2P_{1/2}$和$^2S_{1/2}$的塞曼能量分裂.

答案:$\pm3.86\times10^{-5}$eV; $\pm11.58\times10^{-5}$eV

15.35　在 Na 中的$^2P_{1/2}\to{}^2S_{1/2}$变换有 5895.9Å 波长.计算在 2T 磁场中看到的波长的改变.

答案:±0.216Å; ±0.433Å

15.36　假定 L·S 相互作用远大于与外部磁场的相互作用.计算在 0.05T 磁场中氢原子态$^2D_{3/2}$和$^2D_{5/2}$的反常塞曼分裂.

答案:对于$^2D_{3/2}$: $\pm3.47\times10^{-6}eV$, $\pm1.6\times10^{-6}$eV;对于$^2D_{5/2}$: $\pm8.68\times10^{-6}$eV; $\pm5.21\times10^{-6}$eV; $\pm1.74\times10^{-6}$eV

第16章 X 射 线

16.1 X射线装置

由 W. 伦琴在 1895 发现的 X 射线是高能光子(1~100keV),波长在 1Å 数量级. 它们通常是由高能电子束轰击一个靶标产生的,如图 16-1 所示. 在阴极上的电子动能可略去,所以当它们轰击靶标时电子动能为 $K = eV$.

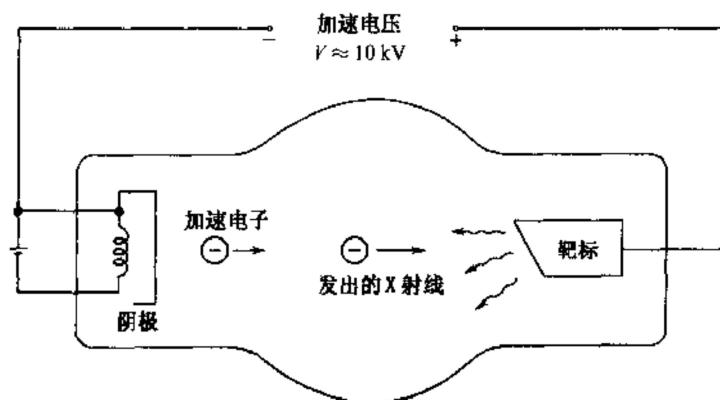


图 16-1

16.2 轫致辐射的产生

轰击电子与靶标中原子的相互作用方式可以有若干种. 一种相互作用类型是,如图 16-2 所示,电子由带正电核加速. 当一个电荷加速时,它将放出辐射,按照量子图象,它将以光子的形式出现,能量为 $h\nu$,等于电子动能的改变,即 $h\nu = K_i - K_f$. 在这种形式下产生的辐射称为轫致辐射,在德语中是"煞车"或"慢化"辐射之意.

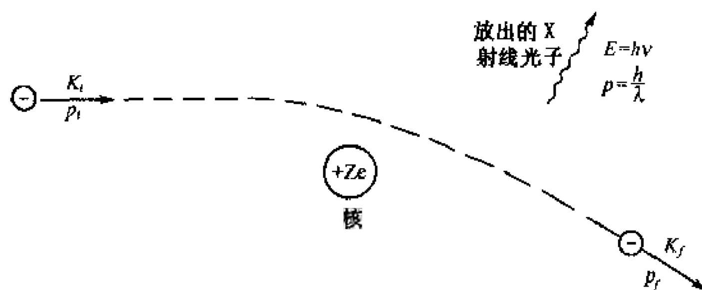


图 16-2

电子束中的电子在静止之前可以产生若干此类光子. 当电子在单次相互作用中损失全部原有动能时,就出现了可能有的最大能量光子,它有最大频率或最小波长,关系为

$$h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = eV \tag{16.1}$$

于是轫致辐射过程将产生连续谱的辐射,它有截止频率或波长,它与加速电压的关系见式(16.1).

16.3 X射线特征谱线的产生

也有可能入射电子激发了X射线管靶标上原子的电子. 并且因为大的加速电压, 轰击电子有足够大的能量击出靶标原子实内的紧束缚电子. 如果实内电子被击出, 原子中的高能级电子将会进入这个低的空位态, 在这个过程中放出辐射. 因为靶标原子的内部能级之间能量差相当大, 所发出的辐射在X射线范围.

如果K壳层($n=1$)电子被移去, 较高能态的电子落入K壳层生成一系列以K_α, K_β, K_γ, …, 标记的X射线谱. 看图16-3(a). 如L壳层($n=2$)的电子被移去, 另一系列的线, 称为L系列, 会出现. 类似地, 到M壳层的跃迁的结果是M系列, 等等.

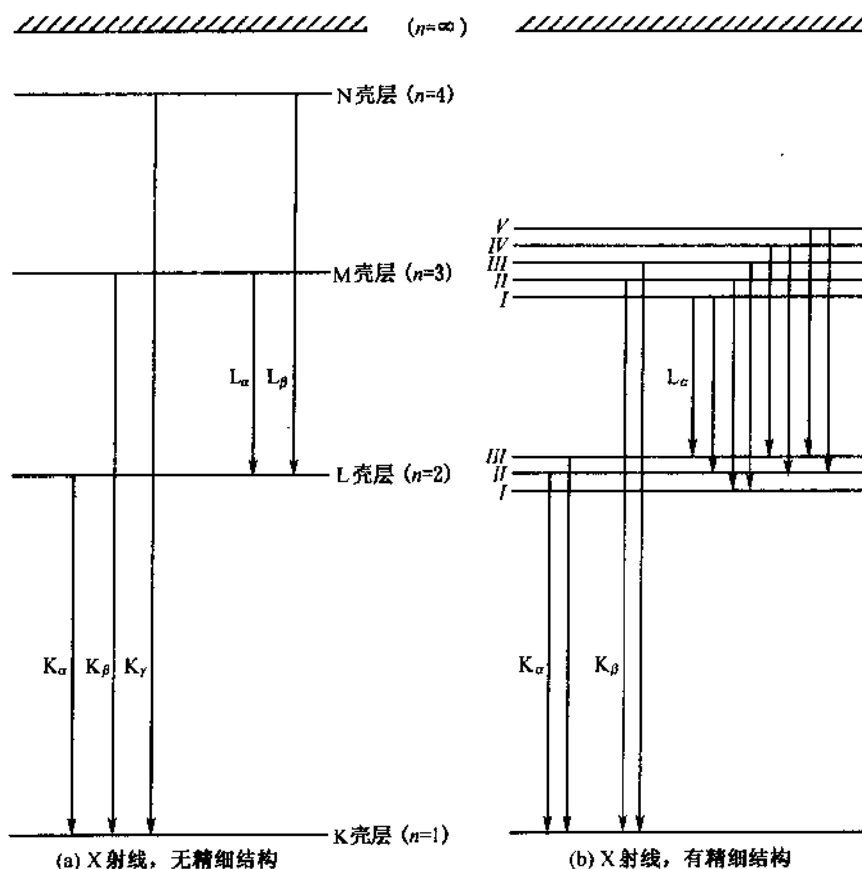


图 16-3

当由电子轰击而激发的多电子原子谱被观察到时, 我们看到光滑的轫致辐射背景, 有最小的波长割断, 它对应于最大的加速电压, 还有由K_α, K_β等跃迁产生的强烈的锐线, 见图16-4.

在详细观察下, 每一条特征X射线由若干靠得很近的线复合而成[图16-3(b)]. 这些线

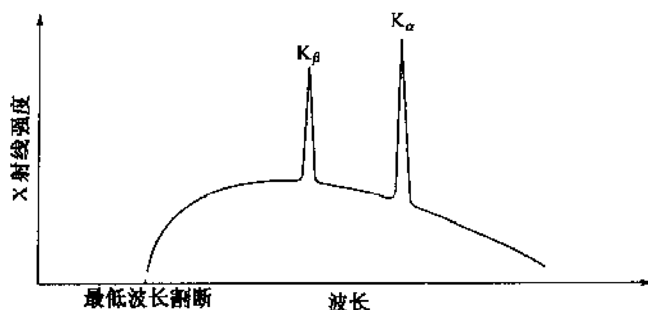


图 16-4

分裂来自于原子能级(K 壳层例外,这里 $n=1,L=0$),见 13.4 的讨论.

16.4 莫塞莱关系

在 1913 年 H. 莫塞莱找出:对于 K 和 L 的 X 射线系,所观察到的频率符合关系

$$\nu^{1/2} = A(Z - Z_0) \tag{16.2}$$

这里 Z 是靶标材料的原子序,而 A 和 Z_0 是常量与所观察的特殊谱线有关.对于 K 系,从实验中找到 $Z_0=1$ 而 A 的数值随着所观察的 $K_\alpha, K_\beta, \cdots$ 跃迁而略有改变.对于 L 系列,$Z_0=7.4$,而 A 随着 $L_\alpha, L_\beta, \cdots$ 线也略有改变.

式(16.2)的形式可从玻尔类型模型推导出来(题 16.6),找到

$$A_{K_\alpha} = \left(\frac{3}{4}cR_\infty\right)^{1/2} = \left[\frac{3}{4}\left(3\times10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(1.097\times10^7\ \frac{1}{\mathrm{m}}\right)\right]^{1/2}$$
$$= 4.97\times10^7\mathrm{Hz}^{1/2}$$
$$A_{L_\alpha} = \left(\frac{5}{36}cR_\infty\right)^{1/2} = \left[\frac{5}{36}\left(3\times10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(1.097\times10^7\ \frac{1}{\mathrm{m}}\right)\right]^{1/2}$$
$$= 2.14\times10^7\mathrm{Hz}^{1/2}$$

这些值与实验所得到的结果符合得相当好(见题 16.7 和 16.8).并且,除了另有声明的以外,问题中可用的关系包括莫塞莱关系在内.

虽然玻尔理论是在气态无相互作用原子下发展的,但看来它足以阐明在固体物质中原子的性质,固体中原子彼此间的作用非常强.这是因为,仅在强束缚内层电子间出现 X 射线变换.当原子受限制而形成一个固体时,外层电子的能级与气体状态的比较起来将有区别.但对于内层电子,因为它们束缚得很紧,当物质从气态变成固态或液态时,本质上不会改变.

16.5 X 射线吸收边

当一束 X 射线通过物体时,某些光子可能与材料中的原子相互作用,使得光子从光束中移去.使得任何的光子束强度衰减 的主要相互作用过程是光电效应,康普顿散射和对产生(第 9 章).因为 X 射线的能量范围在 1～100keV 范围,它们不可能产生电子-正电子对,对产生要求能量超过 1000keV(题 9.88).于是 X 射线束的强度只是由上述过程的前两种所衰减,其中光电效应是主要的衰减机制.

在单色 X 射线束进入目标材料中 x 距离时,它的强度 I 由 9.5 节的式(9.1)给出而为

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

这里 I_0 是入射束的强度,μ 是材料的吸收系数.系数 μ 与目标材料原子及 X 射线光子的能量这两者有关.

设对于一个给定的目标材料,所测出的 μ 是 X 射线能量的函数.当能量增加,吸收系数减小,因为较高能量的光子一般少一些产生光电效应或经历康普顿散射.这种递减继续到 X 射线能量刚好等于芯电子之一的结合能.这时,更多的电子进入光电发射,使得在传送的 X 射线强度显著地衰减,或者等价地,吸收系数值会突然增加.这个 μ 值的尖锐增加发生在一个芯电

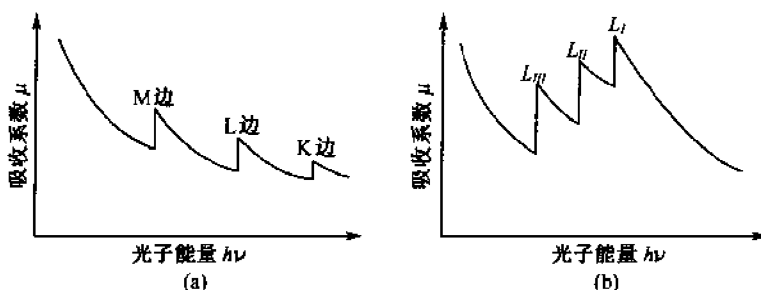


图 16-5

子的结合能处,其结果是图 16-5(a)所示的吸收边. K, L, …, 吸收边的测量于是可用来确定对应的芯电子的结合能.

K 边是个例外,每一个吸收边实际上是由一些互相靠近的尖峰组成的,它们对应于能级的精细结构[图 16-5(b)].

16.6 俄歇效应

在上面的讨论中,假设光电子由来自外源的 X 射线所产生. 但有可能一个原子吸收了自身的一个电子的变换而发出 X 射线,从而放出光电子. 从这种内部转换 X 射线产生的光电子称为俄歇电子.

16.7 X 射线荧光

X 射线光子可以用来激发或喷出芯电子. 当原子回到基态时最终向下转换产生附加的 X 射线光子,其能量比 λ 射的 X 射线要小. 这个现象称为 X 射线荧光.

例 题 详 解

16.1 TV 管工作在 20kV 的加速电位上. 从 TV 装置发出的最大能量的 X 射线是什么?

解 ☞ TV 管中的电子有 20keV 的能量,如果由一个碰撞使电子静止并放出一个 X 射线光子,这个光子的能量是 20keV. 相应的波长是

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{12.4\text{keV}\cdot\text{Å}}{20\text{keV}} = 0.62\text{Å}$$

16.2 确定钼($Z=42$)的 K_α 线的波长.

解 ☞ 从莫塞莱关系我们有

$$\nu^{1/2} = A(Z-1) = (4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2})(42-1) = 2.04\times10^9\text{Hz}^{1/2}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\times10^8\text{m/s}}{(2.04\times10^9\text{Hz}^{1/2})^2} = 0.721\times10^{-10}\text{m} = 0.721\text{Å}$$

与实验值 0.709Å 符合得相当好.

16.3 在莫塞莱关系中,在 K_α 或 K_β 变换中,哪一个具有较大常数 A.

解 ☞ K 跃迁的莫塞莱关系是 $\nu^{1/2}=A(z-1)$. K_β 跃迁比起 K_α 变换来有较大的能量;因而较高频率光子由 K_β 跃迁发送出去,因而 K_β 跃迁的 A 要比 K_α 的大.

16.4 对于不同元素的 K_α 线的实验测量有下面的数据

Fe:1.94Å Co:1.79Å Ni:1.66Å Cu:1.54Å

由这些数据确定各个元素的原子序.

解 ☞ 由莫塞莱关系

$$\nu^{1/2} = (4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2})(Z-1) \quad 或 \quad Z = 1 + \frac{\nu^{1/2}}{4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2}}$$

又利用 $\nu=c/\lambda$ 我们得到

$$Z = 1 + \frac{c^{1/2}}{\lambda^{1/2}}\left(\frac{1}{4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2}}\right) = 1 + \frac{34.85}{\lambda^{1/2}}(\lambda 以 \text{Å} 为单位)$$

计算结果见表 16-1.

表 16-1

元素	λ/Å	Z
Fe	1.94	26.02≈26
Co	1.79	27.04≈27
Ni	1.66	28.04≈28
Cu	1.54	29.08≈29

在莫塞莱工作之前，原子量是 58.69 的 Ni 在周期表中放在原子量 58.94 的 Co 之前，并且相信 Ni 和 Co 的原子序分别是 27 和 28. 利用上述实验数据，莫塞莱指出这个顺序及相应的原子序必须倒转过来.

16.5　100keV 的电子束射到 Mo($Z=42$)靶上，Mo 中实电子的结合能见表 16-2. 计算所发生的跃迁的波长.

表 16-2

壳层	K	L_{I}	L_{II}	L_{III}	M_{I}	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_{V}
电子	1s	2s	2p	2p	3s	3p	3p	3d	3d
结合能, keV	20.000	2.866	2.625	2.520	0.505	0.410	0.393	0.230	0.227

解　☞　仅在 $\Delta l=\pm 1$ 的变换才是允许的. 变换表示图 16-6. 计算波长的公式是

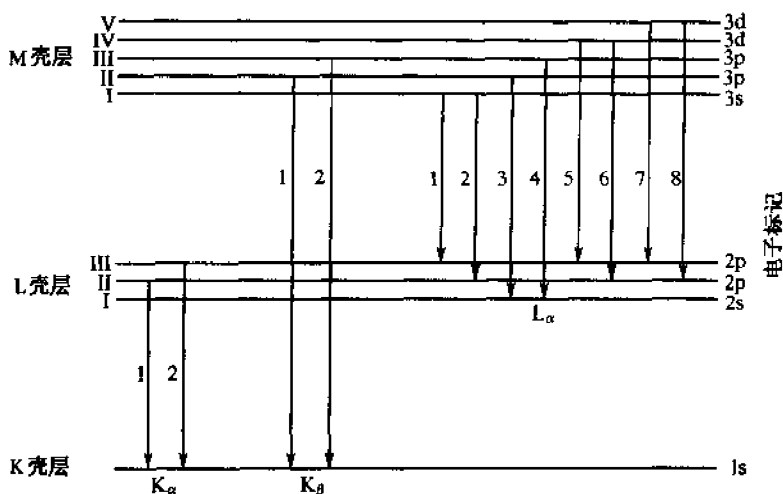


图 16-6

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{h\nu}=\frac{hc}{E_u-E_l}=\frac{12.4\text{keV}\cdot\text{Å}}{E_u-E_l}$$

计算结果见表 16-3.

表 16-3

变换		E_u/keV	E_l/keV	λ/Å
K_α	1	−2.625	−20.000	0.7137
	2	−2.520	−20.000	0.7094
K_β	1	−0.410	−20.000	0.6330
	2	−0.393	−20.000	0.6324
L_α	1	−0.505	−2.520	6.1538
	2	−0.505	−2.625	5.8491
	3	−0.410	−2.866	5.0489
	4	−0.393	−2.866	5.0142
	5	−0.230	−2.520	5.4148
	6	−0.230	−2.625	5.1775
	7	−0.227	−2.520	5.4078
	8	−0.227	−2.625	5.1710

这个问题是特征X射线的精细结构的一个例证.

16.6 利用简单的玻尔图景,计算变换的 K_α 和 L_α 系列的莫塞莱方程中的 A 值.

解 ☞ 对于单电子原子,我们知道(11.3节)

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\nu}{c}=R_\infty Z^{*2}\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right) \quad 或 \quad \nu^{1/2}=\left[\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_u^2}\right)cR_\infty\right]^{1/2}Z^*$$

这里 R_∞ 是里德伯常数, n_u 和 n_l 是电子变换中的高能态和低能态的主量子数,而 Z^*e 是作用到电子上的净正电荷.对于 K_α 和 L_α 跃迁,我们分别有 $n_u=2, n_l=1$ 和 $n_u=3, n_l=2$,所以

$$\nu_{K_\alpha}^{1/2}=\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)cR_\infty\right]^{1/2}Z^*=\left(\frac{3}{4}cR_\infty\right)^{1/2}Z^*=(4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2})Z^*$$

$$\nu_{L_\alpha}^{1/2}=\left[\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)cR_\infty\right]^{1/2}Z^*=\left(\frac{5}{36}cR_\infty\right)^{1/2}Z^*=(2.14\times10^7\text{Hz}^{1/2})Z^*$$

因此, $A_{K_\alpha}=4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2}$ 和 $A_{L_\alpha}=2.14\times10^7\text{Hz}^{1/2}$。如果假定在 K_α 跃迁中,原子中的内部电子不受外部电子的影响,在跃迁前的 L 电子将看到有效电荷 $(Z-1)e$,因为剩下的K电子屏蔽了电荷是 Ze 的原子核.在上面的关于 K_α 跃迁的表达式中利用 $Z^*=Z-1$,我们得到

$$\nu_{K_\alpha}^{1/2}=(4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2})(Z-1)$$

在包含有比 L 壳层更远的电子的跃迁时,屏蔽效应变得比较复杂,而莫塞莱关系中的常数 Z_0. 不再等于屏蔽电子数.

16.7 对于每一条 K_α 线,见表16-4,找出其莫塞莱关系的 A 值.

表16-4

元素	Sc	Ga	Nb	Sb	Pm	Lu	Tl
Z	21	31	41	51	61	71	81
$K_{\alpha1}$, keV	4.09	9.25	16.62	26.36	38.72	54.07	72.87
$K_{\alpha2}$, keV	4.09	9.22	16.52	26.11	38.17	52.97	70.83

解 ☞ 利用

$$\nu^{1/2}=\left(\frac{E}{h}\right)^{1/2}=\left(\frac{E}{4.136\times10^{-18}\text{keV}\cdot\text{s}}\right)^{1/2}=\left(\frac{49.17\times10^7\text{Hz}^{1/2}}{\text{keV}^{1/2}}\right)E^{1/2}$$

这里在莫塞莱关系中 E 以keV为单位,我们有

$$A=\frac{\nu^{1/2}}{Z-1}=\left(49.17\times10^7\frac{\text{Hz}^{1/2}}{\text{keV}^{1/2}}\right)\frac{E^{1/2}}{Z-1}$$

在表16-5中是数字结果.

表16-5

Z	21	31	41	51	61	71	81
A_1, $\text{Hz}^{1/2}\times10^7$	4.97	4.98	5.01	5.05	5.10	5.17	5.25
A_2, $\text{Hz}^{1/2}\times10^7$	4.97	4.98	5.00	5.02	5.06	5.11	5.17

A 值与问题16.6中所得到的 $A=4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2}$ 符合得相当好.

16.8 在 W($Z=74$) L 和 M 壳层的能量是

壳层	L_I	L_{II}	L_{III}	M_I	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_V
能量 keV	12.099	11.542	10.205	2.820	2.575	2.281	1.872	1.810

对于 L_α 线的最大和最小频率确定莫塞莱关系中的 A 值并且将它们与问题16.6中的结果比较.

解 ☞ L_α 线出自M到L壳层的变换.最大和最小的可允许频率分别出自于 $M_{III}\to L_I$ 及 $M_I\to L_{III}$ 变换(见题16.5),相应的频率是

$$\nu_{max} = \frac{E_{L_I} - E_{M_{III}}}{h} = \frac{12.099\text{keV} - 2.281\text{keV}}{4.136 \times 10^{-18}\text{keV} \cdot \text{s}} = 2.374 \times 10^{18}\text{Hz}$$

$$\nu_{min} = \frac{E_{L_{III}} - E_{M_I}}{h} = \frac{10.205\text{keV} - 2.820\text{keV}}{4.136 \times 10^{-18}\text{keV} \cdot \text{s}} = 1.786 \times 10^{18}\text{Hz}$$

将这些值代到莫塞莱关系中，我们有

$$A_{max} = \frac{\nu_{max}^{1/2}}{Z - 7.4} = \frac{(2.374 \times 10^{18}\text{Hz})^{1/2}}{74 - 7.4} = 2.31 \times 10^{7}\text{Hz}^{1/2}$$

$$A_{min} = \frac{\nu_{min}^{1/2}}{Z - 7.4} = \frac{(1.786 \times 10^{18}\text{Hz})^{1/2}}{74 - 7.4} = 2.01 \times 10^{7}\text{Hz}^{1/2}$$

这两个值位于题 16.6 中所得的值 $A = 2.14 \times 10^{7}\text{Hz}^{-1}$的两边.

16.9　对于原子中的两个 K 电子假设有下述模型：每个电子的总能量是在“有效”核荷下的玻尔能量再加上库仑相互作用能量，后者是假定两个电子在两倍玻尔轨道半径 R_B 的最大距离间隔下求得的. K 壳层的结合能在表 16-6 给出，求出该元素的核屏蔽因子 $Z_0 = Z - Z^*$.

表 16-6

元素	Ni	Zr	Sb	Gd	Ta
Z	28	40	51	64	73
K 壳层结合能/keV	8.333	17.998	30.491	50.239	67.417

解 ☞　由式(11.5)及 $n = 1$，玻尔能量是 $-Z^{*2}E_1^0$ 而库仑相互作用能是 $ke^2/2r_B$. 每一个电子的结合能是它的总能量的负值；从而

$$BE = -\left(-Z^{*2}E_1^0 + \frac{ke^2}{2r_B}\right) = E_1^0 Z^{*2} - \frac{ke^2}{2r_B} \tag{1}$$

其中 $E_1^0 = 13.6\text{eV} = 0.0136\text{keV}$ 并且由式(11.4)以及 $n = 1$,

$$r_B = \frac{1}{Z^*}\frac{h^2}{4\pi^2 kme^2} = \frac{1}{Z^*}\frac{ke^2}{2E_1^0}$$

或

$$\frac{ke^2}{2r_B} = E_1^0 Z^*$$

将这些值代入式(1)得二次方程

$$Z^{*2} - Z^* - \frac{BE}{E_1^0} = 0$$

其中的正根是 Z^*. 所得的数值结果列在表 16-7.

表 16-7

Z	Z^*	Z_0
28	25.3	2.7
40	36.9	3.1
51	47.9	3.1
64	61.3	2.7
73	70.9	3.1

屏蔽因子 Z_0 全部近似相等的事实表明玻尔模型是对 K 壳层电子的相当好的近似.

16.10　在铀($Z = 92$)中，K 吸收边是 0.107Å 并且 K_α 是 0.126Å. 确定 L 吸收边的波长.

解 ☞ 从图 16-7，有

$$E_K = \frac{hc}{\lambda_K} = \frac{12.4\text{keV} \cdot \text{Å}}{0.107\text{Å}} = -119.5\text{keV}$$

并且

$$E_L - E_K = \frac{hc}{\lambda_K} = \frac{12.4\text{keV}\cdot\text{Å}}{0.126\text{Å}} = 98.4\text{keV}$$

于是 $E_L = 98.4 - 115.9 = -17.5\text{keV}$，并且

$$\lambda_L = \frac{hc}{-E_L} = \frac{12.4\text{keV}\cdot\text{Å}}{17.5\text{keV}} = 0.709\text{Å}$$

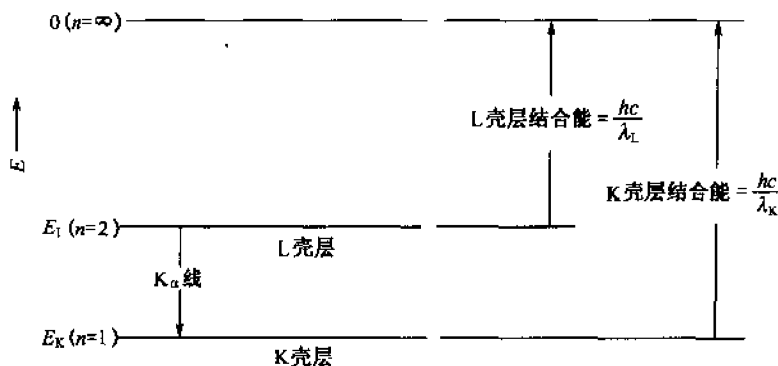


图 16-7

16.11 Y($Z=39$)的K吸收边是0.7277Å.为了从Y产生K系辐射,要求至少17.039kV.从这三个数据确定h/e.

解 ☞ 0.7277Å光子的能量刚好够从K壳层移去一个电子,

$$E_\nu = h\frac{c}{\lambda} = h\frac{2.998\times10^8\text{m/s}}{0.7277\times10^{-10}\text{m}} = (4.120\times10^{18}\text{s}^{-1})h$$

能够轰走一个K壳层电子的轰炸电子的能量是

$$E_e = eV = e(17.039\times10^3\text{V})$$

因为这两个能量必须相等,我们有

$$(4.120\times10^{18}\text{s}^{-1})h = e(17.039\times10^3\text{V})$$

$$\frac{h}{e} = 4.136\times10^{-15}\text{V}\cdot\text{s} = 4.136\times10^{-15}\frac{\text{J}\cdot\text{s}}{\text{C}}$$

16.12 K吸收边是0.15Å的材料发出0.10ÅX射线.从K壳层发出的光电子的最大动能是多少?

解 ☞ K壳层结合能是

$$|E_K| = \frac{hc}{\lambda_K} = \frac{12.4\text{keV}\cdot\text{Å}}{0.15\text{Å}} = 82.7\text{keV}$$

入射光子的能量是

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.4\text{keV}\cdot\text{Å}}{0.10\text{Å}} = 124\text{keV}$$

这两个能量之差就是最大动能

$$K_{max} = E_\nu - |E_K| = 124\text{keV} - 82.7\text{keV} = 41.3\text{keV}$$

16.13 当0.50Å X射线射到一个材料上,观察到从K壳层射出的光电子在2×10^{-2}T的磁场中按半径为23mm的圆周运动.向K壳层电子的结合能是多少?

解 ☞ 光电子的速度从$F=ma$得到:

$$evB = m\frac{v^2}{R} \quad 或 \quad v = \frac{e}{m}BR$$

光电子的动能于是为

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2R^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{(1.6\times10^{-19}\text{C})^2(2\times10^{-2}\text{T})^2(23\times10^{-3}\text{m})^2}{(9.11\times10^{-31}\text{kg})} = 2.97\times10^{-15}\text{J}$$

或者

$$K = (2.97 \times 10^{-15}\text{J}) \frac{1\text{keV}}{1.6 \times 10^{-16}J} = 18.6\text{keV}$$

入射光子的能量是

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.4\text{keV} \cdot \text{Å}}{0.50\text{Å}} = 24.8\text{keV}$$

结合能是这两者之差:

$$BE = E_\nu - K = 24.8\text{keV} - 18.6\text{keV} = 6.2\text{keV}$$

16.14 当某种元素受单色X射线照射，放出的光电子经测量知道截止电势分别为24，100，110，和115kV. 如果这个元素用作X射线管的靶标，其 K_α 线的波长是多少?

解 ☞ 截止位能 eV_s 等于入射光子的能量和在某个壳层的电子的结合能之差:

$$eV_s = E_P - E_B$$

对于电子的不同截止位势因为它来自于不同的壳层，其中最小值(24keV)对应于K壳层电子的喷出. 将两个最小的截止势能相减，我们有

$$eV_{sL} - eV_{sK} = (E_p - E_{BL}) - (E_p - E_{BK}) = E_{BK} - E_{BL}$$

或

$$100\text{keV} - 24\text{keV} = E_{BK} - E_{BL}$$

差值76keV是 K_α 线的能量. 对应的波长是

$$\lambda = \frac{hc}{E_{BK} - E_{BL}} = \frac{12.4\text{keV} \cdot \text{Å}}{76\text{keV}} = 0.163\text{Å}$$

16.15 在Zn($Z=30$)中，K和L壳层的离解(结合)能量分别为9.659keV和1.021keV. 求出由 K_αX射线从L壳层发出的俄歇电子的动能.

解 ☞ K_α X射线的能量是

$$E_{K_\alpha} = E_L - E_K = -1.021\text{keV} - (-9.659\text{keV}) = 8.638\text{keV}$$

俄歇电子的动能等于 K_α 光子能量和在 L 壳层电子的结合能之差:

$$K = E_{K_\alpha} - E_{BL} = 8.638\text{keV} - 1.021\text{keV} = 7.617\text{keV}$$

16.16 Cu，Ni和Co的K，L，和M能级在表16-8中给出. 现在想将Cu发出的 K_α 和 K_β 辐射中过滤掉 K_β 线. Ni和Co哪一个作为滤光器更好一些?

表 16-8

元素	Z	E_K, keV	E_L, keV	E_M, keV
Cu	29	−8.979	−0.931	−0.074
Ni	28	−8.333	−0.855	·0.068
Co	27	−7.709	−0.779	−0.060

解 ☞ 由Cu发出的X射线的能量等于Cu中不同能量之差. 于是

$$E_{K_\alpha} = -0.931\text{keV} - (-8.979\text{keV}) = 8.048\text{keV}$$

$$E_{K_\beta} = -0.074\text{keV} - (-8.979\text{keV}) = 8.905\text{keV}$$

对于能够滤走X射线的物质的要求是:该X射线的能量比起从物质原子中喷出电子所要的能量要大. 否则入射的X射线与物质没有明显的相互作用并且通过而不会被滤掉. 我们看到，Ni的K吸收边(8.333keV)位于Cu的 K_α(8.143keV)和 K_β(8.905keV)X射线能量之间，所以 K_β 光子比起 K_α 来与Ni相互作用的机会要多得多. 而 K_α 和 K_β 光子两者都能使得Co的K壳层(7.709keV)有光电发射. 于是Ni是较好的滤光器.

补充习题

16.17 如果从某个元素测量出其 K_α X射线有波长0.786Å，问这元素是什么?

答案:$_{40}Zr$

16.18 一个电子经过10^5V电位加速.当这个电子与一个重核相互作用时,求出所产生的最短的可能波长.

答案:0.124Å

16.19 在K_α精细结构中有多少条线?

答案:2

16.20 如果L_α线在Ca($Z=20$)有值30.1Å,在Zn($Z=30$)有11.2Å,确定对于L_α跃迁的莫塞莱方程中的常数A.

答案:对于Ca,$A=2.51\times10^7\text{Hz}^{1/2}$;对于Zn,$A=2.29\times10^7\text{Hz}^{1/2}$

16.21 从题16.7中的数据,如果对于每一条线的A值取作$4.97\times10^7\text{Hz}^{1/2}$,确定各条线在莫塞莱方程中的$Z_0$值.

答案:

元素	Sc	Ga	Nb	Sb	Pm	Lu	Tl
Z_0对于$K_{\alpha1}$	0.99	0.91	0.67	0.21	−0.56	−1.75	−3.46
Z_0对于$K_{\alpha2}$	0.99	0.96	0.79	0.45	−0.12	−1.00	−2.26

16.22 在NaCl晶体中,格点间隔是2.820Å.如果在主平面15.8°处观察到K_αX射线的1级布拉格散射,它的波长是多少?(这个问题显示了人们如何测量X射线的波长.)

答案:1.54Å

16.23 从铜发出的X射线($K_\alpha=1.54$Å,$K_\beta=1.39$Å,$K_{abs}=1.38$Å)通过一薄层镍($K_\alpha=1.66$Å,$K_\beta=1.50$Å,$K_{abs}=1.49$Å).通过的最强的波长是什么?

答案:8.05Å

16.24 在一个元素中较大的是K吸收能量还是K_αX射线的能量?

答案:K吸收能量.

16.25 在Os($Z=76$)中,K和L吸收边各有波长0.168Å和1.17Å.K_α线的波长是多少?

答案:0.196Å

16.26 在Ta($Z=73$)中,K_α线是0.216Å而L吸收边1.25Å.K吸收边的波长是多少?

答案:0.184Å

16.27 当以0.257Å X射线射向一个材料时,从材料的L壳层射出的光电子的截止电压为8.20V.求出L吸收边的波长.

答案:0.310Å

16.28 一个俄歇电子由K_αX射线从一个K吸收边是0.827Å的材料的L壳层击出,其动能测得是10.2keV.求出K_αX射线的能量和L吸收边的波长.

答案:12.6keV;5.17Å

第V部分 核 物 理

第17章 核的性质

17.1 核子

全部原子核都由两种类型的粒子复合而成,它们是带正电的质子和中性的中子,总称为核子.它们的主要性质见表17-1.

表17-1

	质子	中子
电荷	$+1.6\times10^{-19}$C	0C
静止质量	1.67252×10^{-27}kg 938.256MeV 1.007277u	1.67482×10^{-27}kg 939.550MeV 1.008665u
自旋	1/2	1/2
磁矩	$+2.7928\beta_n$	$-1.9128\beta_n$

原子质量单位u定义为$^{12}_{6}$C恰好具有12u的质量;核磁子β_n是

$$\beta_n=\frac{e\hbar}{2m_p}=\frac{(1.6\times10^{-19}\text{C})(6.58\times10^{-16}\text{eV}\cdot\text{s})}{2(1.673\times10^{-27}\text{kg})}=3.15\times10^{-8}\frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

这里m_p是质子静止质量.磁矩的正号或负号分别表示磁矩与自旋矢量同向或反向.感兴趣的是,中子虽然不含电荷,它仍有磁矩.

质子具有几乎是无穷长的半衰期;单独存在时它们几乎永不衰变.另外,中子有12分钟的半衰期;如果单独有一堆中子,平均地说,每12分钟有一半衰变.

17.2 核力

当核子靠近时(在10^{-15}m=1 fm数量级),可以显示出来一个强的短程吸引力;即在距离大于几个飞米时核力实质上是零.这个吸引力与核子所带的电荷无关;这表示质子-质子,中子-中子,和质子-中子力全都近似相等.

核子之间的力由几个不同的部分组成.除了常规的中心成分而外,这里还有与自旋有关的项,其中核子自旋平行与反平行的数值不相同.注意对于非中心分量,它们并不指向两核子连线方向.非中心分量与核子自旋相对于核子连接线的定向有关.

对于远小于1 fm的距离,核力从吸引力变为推斥力.这个性质通常称为推斥核实体.

17.3 氘

氘核或氘是由一个质子和一个中子复合而成的束缚系统,它是多于一个核子的最简单的核.氘核的性质是:电荷$+1.6\times10^{-19}$C;质量1875.5803 MeV或2.013553u;自旋$S=1$(这是中子和质子自旋之和);磁矩$+0.8574\beta_n$;和角动量$J=1$.

有可能对一个原子指定单个量子化轨道动量矩L.但因为质子-中子相互作用是无中心

的，氘不一定具有肯定的轨道动量矩，代替的说法是，在基态的氘有96%的概率在S($L=0$)态，而4%的概率在D($L=2$)态.

氘也不处于球形.一个测量带电物体偏离球形的量是电四极矩(题17.4).如果物体是球形的，它的电四极矩是零.实验上找到氘的电四极矩是$+0.282\ \mathrm{fm}^2$.

上述讨论表明，即使是只有两个核子复合而成的氘，它的结构也相当复杂，而当研究较重的核时，其复杂性可想而知.

17.4 核

大概有270个已知的核是稳定的，而非稳定核的个数约为此数的4倍半.一个核取决于它的原子序Z，一个整数，等于核中的质子数；另一个整数N，等于它的中子数；和一个质量数$A=N+Z$，它是核子的总数.对于给定的化学元素记号X的核，而Z值标在左下方，A值标在左上方；即${}^A_ZX$.例如${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$有11个质子，23个核子，和$23-11=12$个中子.

核有三种分类.同位素是有同样原子序Z(质子数)的核，例如${}^{16}_{8}\mathrm{O}$和${}^{17}_{8}\mathrm{O}$.同中子异荷数是有同样中子数N的核，例如${}^{13}_{6}\mathrm{C}$和${}^{14}_{7}\mathrm{N}$.同量异位素是有同样质量数A的核，例如${}^{14}_{6}\mathrm{C}$和${}^{14}_{7}\mathrm{N}$.

在轻核中，中子数和质子数大致相等($N\approx Z$).当核子数增加时，稳定核中的中子数变得比质子数大($N>Z$)，其大致规律见图17-1.中子过多出现是因为质子间的推斥库仑力使得它们进一步散开.于是中子物质的密度要较质子物质的密度为大，并且当核子数增加时，在给定的核体积中有较多的中子，而质子较少.

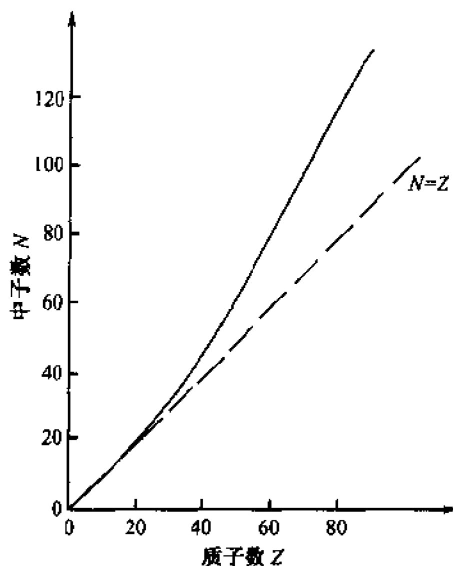


图17-1

17.5 当作一个球的核

核物质密度假定是常数，核的体积与在其中的核子数A成正比.从球对称性，我们有$V=\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3\right)A$，由此给出核半径是

$$R=r_0A^{1/3}$$

几个实验设计来校验这个关系并且求出r_0.得到r_0与测量的核性质有关.对子质量分布的大小，$r_0=1.4\ \mathrm{fm}$；而对于电荷分布的大小，$r_0=1.2\ \mathrm{fm}$.除非另外有规定，在下面讨论及题中我们用数值$r_0=1.4\ \mathrm{fm}$.

如果把核看作是电荷Ze均匀分布的球，则可求出核有静电能(题17.12)

$$E_C = \frac{3}{5}\frac{kZ(Z-1)e^2}{R} \approx \frac{3}{5}\frac{kZ^2e^2}{R}(\text{当 } Z \text{ 很大})$$

这个关系提供了一个确定核电荷分布大小的方法.

17.6 核结合能

我们知道稳定核的静止质量小于组成核子的静止质量的总和.这个质量差在于使核子结合一个核要放出能量.总的核结合能 BE 等于组成核子的静能和最终的核的静能之差:

$$BE = (Zm_p)c^2 + (Nm_n)c^2 - M_{nuc}c^2$$

这里 m_p, m_n,和 M_{nuc}分别是质子,中子,和核的静止质量."液滴"模型(18.1 节)可以用来计算稳定核的结合能.

通常的表格登录的是元素的原子质量而不是它的核质量.为了得到核质量,我们必须从原子的质量中减去原子的电子质量.(严格地说,我们还要加上等价于电子结合能的质量,但比起静止质量来它一般可以略去.)例如$^6_3$Li,它有原子质量 6.015125u,而核质量是

$$M_{nuc} - M_{原子} - Zm_e = 6.015125\text{u} - 3(0.000549\text{u}) = 6.013478\text{u}$$

除非另有说明,在题中给出的质量是原子质量.当应用时,对于 BE 的表达式,用氢原子的质量以代替质子的质量以补偿原子质量中的电子.

例 题 详 解

注:这里所要的原子质量从附录中取得.

17.1 如果电子禁闭在直径为 10^{-14}m 的核中,估计它的最小动能.

解 ☞ 禁闭在核中的最小能量电子的德布罗意波长近似于两倍的核直径(波长的一半与直径适合).于是电子的动量的大小量级为

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{12.4\times10^3\text{eV}\cdot\text{Å}}{(2\times10^{-4}\text{Å})c} = 62\times10^6\,\frac{\text{eV}}{c} = 62\,\frac{\text{MeV}}{c}$$

对应的动能为

$$K = \sqrt{(pc)^2+E_0^2} - E_0 = \sqrt{\left(62\,\frac{\text{MeV}}{c}\times c\right)^2 + (0.511\text{ MeV})^2} - 0.511\text{ MeV} = 61\text{ MeV}$$

17.2 对于题 17.1 的核,估计电子的库仑能量.

解 ☞ 核子数 A 大致是(见 17.5 节)

$$A = \left(\frac{R}{r_0}\right)^3 = \left(\frac{0.5\times10^{-14}\text{m}}{1.4\times10^{-15}\text{m}}\right)^3 \approx 46$$

对于这样大小的核,其质子数 $Z \approx A/2 = 23$.如果电子假定位于核边缘,库仑能量是

$$E_C = -\frac{ke^2Z}{R} = -\frac{(1.44\text{MeV}\cdot\text{fm})(23)}{5\text{ fm}} = -6.6\text{ MeV}$$

这个修正与题 17.1 中找到的 61 MeV 动能比较起来可以忽略.从核中发射出来的电子有几个 MeV 的动能而不是由本处及上一个问题所指出的≈54 MeV.此外,某种正的势垒存在,所以电子可以以正能束缚在核中.这两种效应都不是库仑相互作用所能产生的,一个合理的结论是电子并不是核的组成成分.

在 1920 年由卢瑟福所提出的另一个建议是:质量与质子的近似相等但电荷为零的中性粒子包含在核中.在 1932 年,J.查德威克的实验证实了这些中子的存在(看题 20.14 到 20.16),从而对总数为 A 个核子的核来说,确定了它由 Z 个质子和 $N = A - Z$ 个中子复合组成.

17.3 计算氘磁矩和中子及质子的磁矩之和之间的差.

解 ☞

质子磁矩	$2.793\beta_n$
中子磁矩	$-1.913\beta_n$
和值	$0.880\beta_n$

氘磁矩　$0.857\beta_n$

差　$0.023\beta_n$

因为氘并不总处于 $S(L=0)$态有4%的时间处于 $D(L=2)$态，氘的磁矩不等于质子和中子的磁矩之和.

17.4　对于轴对称分布的核电荷的电四极矩是

$$\mathcal{Q}=\frac{1}{e}\int_V(3z^2-r^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1}$$

这里 $\rho(x,y,z)$是电荷密度，而 $r^2=x^2+y^2+z^2$. 对于由方程

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

确定的均匀电荷旋转椭球来说，电四极矩是

$$\mathcal{Q}=\frac{2Z}{5}(b^2-a^2) \tag{3}$$

这里 Ze 是总的核电荷. 如果平均核半径取作 $R_0^3=a^2b$（椭球的体积是$\frac{4}{3}\pi a^2b$）并且记 $R_0+\delta R_0=b$，证明电四极矩是

$$\mathcal{Q}=\frac{6Z}{5}R_0^2\left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)$$

解　☞ 如果 $b=R_0+\delta R_0$ 并且 $R_0^3=a^2b$，于是，当 $\delta R_0\ll R_0$

$$a^2=\frac{R_0^3}{R_0+\delta R_0}=\frac{R_0^2}{1+\dfrac{\delta R_0}{R_0}}\approx R_0^2\left(1-\frac{\delta R_0}{R}\right)$$

并且

$$\begin{aligned}b^2-a^2&=R_0^2\left[1+2\left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)+\left(\frac{\delta R_0}{R}\right)^2\right]-R_0^2\left(1-\frac{\delta R_0}{R_0}\right)\\&=R_0^2\left[3\left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)+\left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)^2\right]\approx 3R_0^2\left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)\end{aligned}$$

从而

$$\mathcal{Q}=\frac{2Z}{5}(b^2-a^2)=\frac{6Z}{5}R_0^2\left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)$$

17.5　对于$^{155}_{64}\mathrm{Gd}$，其四极矩是 $130\ \mathrm{fm}^2$. 如果 R_0 由关系 $R_0=(1.4\ \mathrm{fm})A^{1/3}$给出，求 $\delta R_0/R_0$.

解　☞ 平均半径是

$$\begin{aligned}R_0&=(1.4\ \mathrm{fm})A^{1/3}=(1.4\ \mathrm{fm})(155)^{1/3}=(1.4\ \mathrm{fm})(5.37)\\&=7.52\ \mathrm{fm}\end{aligned}$$

从题17.4

$$\mathcal{Q}=\frac{6Z}{5}R_0^2\left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)$$

$$130\ \mathrm{fm}^2=\frac{6(64)}{5}(7.52\ \mathrm{fm})^2\frac{\delta R_0}{R_0}$$

$$\frac{\delta R_0}{R_0}=2.99\times10^{-2}=2.99\%$$

这表明对于$^{155}_{64}\mathrm{Gd}$，核几乎是球形的，对球形的偏离仅是平均半径的2.99%.

17.6　如果氘的总角动量有量子数 $J=1$，确定它的可能态.

解　☞ 氘的总角动量($\mathbf{J}$)是对于中子-质子束缚态的轨道角动量($\mathbf{L}$)和中子-质子系统总内禀自旋($\mathbf{S}$)的矢量和. 因为质子和中子有自旋 $S=\frac{1}{2}$，其总内禀自旋是0(单态)或1(三重态). 因为 $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$，并且 $J=1$ 和 $S=0,1$，L 的仅有可能值是0，1和2，在15.3的光谱学标记中，可能的氘态是$^3S_1$，$^3P_1$，$^1P_1$ 和$^3D_1$.

氘的基态是$^3S_1$ 和$^3D_1$ 的混合.

17.7　确定^{16}O和^{208}Pb核的半径.

解 ☞ 从 $R = r_0 A^{1/3} = (1.4\ \text{fm})A^{1/3}$,

$$R_O = (1.4\ \text{fm})(16)^{1/3} = 3.53\ \text{fm}$$

$$R_{Pb} = (1.4\ \text{fm})(208)^{1/3} = 8.29\ \text{fm}$$

17.8　确定核的近似密度.

解 ☞ 如果核当作是均匀球,

$$\text{密度} = \frac{\text{质量}}{\text{体积}} = \frac{A \times (\text{核子质量})}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$= \frac{A(1.7 \times 10^{-27}\ \text{kg})}{\frac{4}{3}\pi(1.4 \times 10^{-15} A^{1/3}\text{m})^3} = 1.5 \times 10^{17}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

1 立方英寸核物质重约十亿吨!

17.9　确定一个稳定核,它的半径是^{189}Os半径的 1/3.

解 ☞ $R \propto A^{1/3}$,

$$\frac{1}{3} = \frac{R}{R_{Os}} = \left(\frac{A}{A_{Os}}\right)^{1/3} = \left(\frac{A}{189}\right)^{1/3}$$

给出

$$A = \frac{189}{27} = 7$$

对应于^7Li.

17.10　计算$^{126}_{52}Te$的结合能.

解 ☞ 结合能是

$$BE = (Zm_p)c^2 + (Nm_n)c^2 - M_{nuc}c^2$$
$$= (52 \times 1.007825\text{u} + 74 \times 1.008665\text{u} - 125.903322\text{u}) \times 931.5\text{MeV/u}$$
$$= 1.066 \times 10^3\text{MeV} \quad \text{或 } 1.066\text{GeV}$$

17.11　从$^{40}_{20}Ca$中移去最低的紧束缚中子的能量是多少?

解 ☞ 从质量-能量守恒

$$M_{^{40}Ca}c^2 + E = (M_{^{39}Ca} + m_n)c^2$$

$$(39.962589\text{u})(931.5\text{MeV/u}) + E = (38.970691\text{u} + 1.008665\text{u})(931.5\text{MeV/u})$$

$$E = 15.6\ \text{MeV}$$

17.12　确定核中质子的电位能,如果假定电荷均匀球形分布.

解 ☞ 考虑电荷中的一个薄球壳,

$$dq = \rho dV = \rho(4\pi r^2 dr)$$

将它加在一个有同样电荷密度而总电荷为

$$q = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

的球上.这个薄壳层的电位能 dE 于是是

$$dE = \frac{kq}{r}dq = \frac{k}{r}\left(\frac{4}{3}\rho\pi r^3\right)(4\pi\rho r^2 dr) = 3k\frac{4}{3}(\rho\pi)^2 r^4 dr$$

带电球的总的电势能将 dE 从 $r=0$ 积到 $r=R$,即球的半径,而得

$$E = \int_0^R dE = 3k\left(\frac{4}{3}\rho\pi\right)^2\int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5}k\left(\frac{4}{3}\rho\pi\right)^2 R^5$$

$$= \frac{3k}{5R}\left(\frac{4}{3}\rho\pi R^3\right)^2$$

因为$\frac{4}{3}\rho\pi R^3 = \rho V = Q = Ze$,我们有

$$E=\frac{3}{5}\frac{kZ^2e^2}{R}$$

构成核的电荷是不连续的,并且得到离散的结果.对于 $Z=1$,库仑能必须是零,但是上面的表达式给出有限的结果.为了改正上面的关系,Z^2 必须改变为 $Z(Z-1)$.对于大的 Z 值,这是较小的修正,但对于较小的 Z 值就不是如此.修正后的库仑能量是

$$E_C=\frac{3}{5}\frac{kZ(Z-1)e^2}{R}$$

17.13　计算 $^{73}_{32}$Ge 的库仑能量.

解 ☞ 利用问题17.12的结果,我们有

$$E_C=\frac{3}{5}\frac{kZ(Z-1)e^2}{R}=\frac{3}{5}\frac{ke^2Z(Z-1)}{r_0A^{1/3}}$$

$$=\frac{3}{5}\frac{(1.44\ \text{MeV}\cdot\text{fm})32(31)}{(1.4\ \text{fm})(73)^{1/3}}=146\ \text{MeV}$$

补充习题

注:对于某些问题可以用附录中的原子质量.

17.14　以 J/T 为单位,求出核磁子.

答案:5.03×10^{-27}J/T

17.15　核磁子和一个电子的玻尔磁子之比是多少?

答案:5.45×10^{-4}

17.16　求出氢的核密度对原子密度之比.(假定核半径是 1 fm.)

答案:0.15×10^{15}

17.17　吸收一个 6 MeV 的 γ 射线并且把氘分解为质子和中子相对于 γ 射线的方向有 90°角,确定质子和中子的动能.

答案:$K_p=1.91$ MeV, $K_n=1.86$ MeV

17.18　对于问题 17.17,找出质子相对于 γ 射线的角度.

答案:84°

17.19　参照题 17.4,从式(1)和(2)以及椭球均匀带电的事实导出式(3).

17.20　$^{165}_{67}$Ho 的电四极矩是 300 fm^2.如果 $R_0=(1.4\ \text{fm})A^{1/3}$,求出 $\delta R_0/R_0$.

答案:6.33%

17.21　计算氘的结合能.

答案:2.226 MeV

17.22　一个 $A=235$ 的核分裂为两个新核,它们的质量数为 2:1.求出新核的半径.

答案:$r_1=5.99$ fm, $r_2=7.55$ fm

17.23　利用标准记号,写出 20 个核子的氖和 89 个核子钇的标记.

答案:$^{20}_{10}$Ne; $^{89}_{39}$Y.

17.24　Ge 的半径是 $^{9}_{4}$Be 的两倍.从这个信息知道在 Ge 中有多少个核子?

答案:72

17.25　从 $^{40}_{20}$Ca 中移去一个最低的紧束缚质子所需的能量是多少?将这个答案与题 17.11 中的比较.

答案:8.33 MeV

17.26　计算 $^{208}_{82}$Pb 的核半径和从玻尔理论计算出来的最内电子的轨道半之比.

答案:1/77.8

17.27　确定 Z 值使得在问题 17.12 给出的库仑能的正确表达式和近似表达式相差 5%.

答案:$Z=21$

17.28　计算 $^{18}_{8}$O 和 $^{175}_{71}$Lu 的库仑能.

答案:13.2 MeV; 548 MeV

17.29　计算 $^{39}_{19}$K 的结合能.

答案:333.7 MeV

第18章 核 模 型

现在还不存在一种基本理论可以阐明核的全部观察结果.代之而起的是建立了各种不同的模型,其中每一个模型都阐明了某些核性质,但不是全部的核性质.在21章,我们将研究核反应中产生出来的基本粒子.

18.1 液滴模型

在1935年C.韦斯查克(C. v. Wieszäcker)确认核性质如大小,质量,和结合能与液滴中找到的相似.在液滴中,密度是常数,其大小正比于液滴的粒子数,或分子数,而液滴的蒸发热,或结合能正比于生成液滴的质量或粒子数.

我们即将指出,核的液滴模型引导到下面的表达式,称为半经验质量公式,这是核质量与A和Z的关系:

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n - b_1A + b_2A^{2/3} + b_3Z^2A^{-1/3} + b_4(A - 2Z)^2A^{-1} + b_5A^{-3/4} \tag{18.1}$$

在式(18.1)中的常数由实验数据确定,它们的数值可以取作(单位与能量相同)

$$b_1 = 14.0\ \text{MeV}, \qquad b_3 = 0.58\ \text{MeV}$$

$$b_2 = 13.0\ \text{MeV}, \qquad b_4 = 19.3\ \text{MeV}$$

而b_5的值按照下述格式给出:

A	Z	b_5
偶	偶	−33.5 MeV
奇		0
偶	奇	+33.5 MeV

在式(18.1)中的不同的项由一系列的修正而得,如下面所示.

先略去结合能,初步定下由Z个质子和$N = A - Z$个中子复合而成的核的质量为$Zm_p + (A - Z)m_n$.

其次,考虑到核子的结合能修正对质量的估计.因为核力是吸引力,结合能必然是正的(分开核子时必须作正功),所以核的质量必然小于分开的各核子的质量和.从液滴模型,蒸发热(结合能)正比于核子数,其结果是形成修正$-b_1A(b_1>0)$.

从第一次修正的假设,每个核子的结合能是b_1,认为每个核都同样程度地由其他核子围绕.这个对于核表面的核子当然不是真的,它们的受束缚程度较弱.于是在第一次近似中减去的太多,考虑到表面效应,正比于核表面积的质量修正$b_2A^{2/3}$必须加上.

在质子之间的正库仑能E_C(与结合能$-E_C$等价)增加了核质量E_C/c^2.由问题17.12,对于大的Z,

$$E_C \propto Z^2R^{-1} = Z^2(r_0A^{1/3})^{-1} \propto Z^2A^{-1/3}$$

这就是项$b_3Z^2A^{-1/3}$.

现在所有核质量表达式中的项借助于对带电不可压缩液体的类比而求了出来.此外,因为量子力学效应,一般还要加两个附加项如下.

如果核内中子比质子多(或相反),它的能量和相应的质量因为泡利不相容原理将会增加.关于这个效应的修正项与过多的中子(或质子)有关,有

$$b_4(N-Z)^2A^{-1} = b_4(A-2Z)^2A^{-1}$$

见题18.16.

在核中的核子倾向于"成对",即,中子或质子群聚在一起而有相反的自旋.由于这个效应,成对能量随 $A^{-3/4}$ 变化,并且随不成对核子数目增大即递增.这些数目确定如下:

A	Z	未配对核子对
偶	偶	0
奇		1
偶	奇	2(1中子和1质子)

把这个成对能量包括进来从而给出了对核质量的最终表达式(18.1).

每个核子的平均结合能是:由式(18.1)求出核的质量-能量与它的组成核子的质量-能量之差,然后除以核子数:

$$BE/A = \frac{[Zm_p + (A-Z)m_n - M]c^2}{A}$$

$$= b_1 - b_2A^{-1/3} - b_3Z^2A^{-4/3} - b_4(A-2Z)^2A^{-2} - b_5A^{-7/4} \qquad (18.2)$$

(注意到 BE/A 并非是从给定核移去单个核子所需要的能量.)此关系式的曲线见图18-1.注意到对于大的 A, BE/A 的值近似于常值8 MeV.

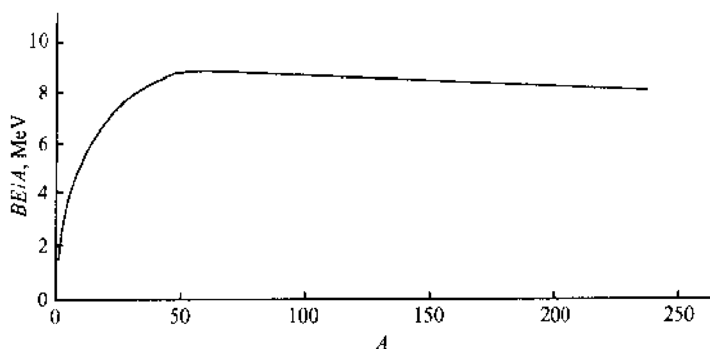


图18-1

需要强调的是式(18.1)或(18.2)并不给出严格的值,预言的仅是近似值;将在已解问题中指出,对于不同的核其精度是不同的.

18.2 壳层模型

在液滴模型中核子并未单独处理,而是对整个核的平均效应.这个模型成功地说明了某些核性质,例如每个核子的平均结合能.但是,其他的核性质,例如激发态的能量和核磁矩,要求有微观的模型,其中考虑到各自核子的行为.

当核数据收集起来之后,发现核性质在核中的 N 或 Z 在通常称作"幻数"的2,8,20,28,50,82或126时出现重大的改变.在这些幻数上,核特别稳定而且数目很多,并且填满这些"壳层"的最后一个核子,或幻数的核子,具有高的结合能.此外,第一激发态的能量比附近的并未具有幻数的核的要大.例如,锡有幻数 $Z=50$ 有10个稳定的同位素(Z 相同,A 不同),移走一个质子的能量是大约11 MeV,而偶-偶同位素(即 N 和 Z 都是偶数)的第一激发态在基态之上

大约有 1.2 MeV. 作为对照,附近的碲同位素,$Z=52$,移去一个质子的能量是 7 MeV,而对于偶-偶同位素,其第一激发态的能量是大约 0.60 MeV.

我们观察到与电子填满各种类型的原子壳层(第 15 章)类似的有关原子的涨落行为.这些在性质上的类似性启发我们某些核性质可以用核壳层模型阐释.

原子的壳层模型由一系列相继的近似得到.首先假设电荷为 Ze 的核的能级相继充填以 Z 个电子,假设它们之间没有相互作用,然后考虑到各种相互作用而加以修正.但这些修正是小的;从对壳层模型的第一次近似所得到的主要效应是电子在核的库仑场中独立运动的平均结果.

如果同样的处理用来发展核的壳层图象,用来表示短程核力的必须是不同的位势.一个处理方式是假定核子在平均谐振子位势中运动

$$V=\frac{1}{2}kR^2=\frac{1}{2}m\omega^2R^2$$

由量子力学处理证明能级是

$$E=\left(\mathcal{N}+\frac{3}{2}\right)\hbar\,\omega \tag{18.3}$$

这里 $\mathcal{N}=2(n-1)+l$.这里 l 是轨道角动量量子数并且取得数值 $l=0,1,2,3,\cdots$;它与轨道角动量矢量的关系如同通常情况,$|\mathbf{l}|=\sqrt{l(l+1)}\hbar$ (对于核子,量子化矢量和量子数用小写字母表示.)量 n 是个整数,取值 1,2,3,4,….与氢原子解相对照,这里 l 的值并不受 n 限制.

核子轨道动量矩态在频谱记号里是

l 的值	0	1	2	3	4	5	…
字母记号	s	p	d	f	g	h	…

预先固定字母记号及 n 值,给定 l 态后的顺序(以能量的递增为顺序)是知道的.(对于固定的 l,$\mathcal{N}$随着 n 递增.)于是 2d 态是次低的 $l=2$ 的态.

图 18-2(a)表示由谐振子位势表示的能级及由泡利不相容原理允许的各能级的最大核子数.可以看到能级封闭在 2,8,20,40,70,112,和 168 个核子,其中只有前三个是幻数.

为了考虑观察到的幻数,在 1949 年 M.迈耶和 J.詹生独立地提出了在谐振子位势之外还有自旋-轨道耦合($\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}$).因为对子自旋量子数核子只有一个数值 $s=\frac{1}{2}$,自旋-轨道效应将使得每一个 $l>0$ 的轨道动量矩态分裂成两个轨道(或轨道的),按照总角动量量子数 $j=l+s$ 或 $j=l-s$ 标记[见式(13.10)].相对能量分裂可由 $\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}$ 的值求得

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}=\frac{1}{2}[j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)]\hbar^2$$

$$=\begin{cases}\dfrac{l}{2}\hbar^2 & j=l+\dfrac{1}{2}\\[2mm] -\dfrac{l+1}{2}\hbar^2 & j=l-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

这两个轨道之间的能量间隔正比于 $2l+1$,因此当 l 增大时变大.

轨道由轨道动量矩态的记号,在其右下角附加一个 j 值来指定.例如 $1d_{3/2}$表示量子数 $n=1$, $l=2$, $j=l-s=\frac{3}{2}$的组合.对子核,便利的是将泡利不相容原理改写如下:没有两个核子可以具有相同的量子数集合(n,l,j,m_j).这样(题 18.10)一个轨道可以至多包含 $2j+1$ 个核子.

在原子中,自旋-轨道分裂是给出"精细"结构的弱效应.但在核中,自旋-轨道相互作用是相当强的,并且给出的能量可与谐振子能级的间隔相比较.在核和在原子中的 $\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}$ 分裂的另一个差别是在核中 $j=l+\frac{1}{2}$轨道的能量低于 $j=l-\frac{1}{2}$轨道,而在原子中的高低正好倒过来.

不能断定自旋-轨道分裂是否使得原始的谐振子能级"变换".轨道的最后顺序决定于实验

证据，如图 18-2(b)所示．壳层封包——到每个大能隙的核子数——对应于幻数．

质子(和中子)在同样的轨道中倾向于形成零角动量的对子．于是，偶-偶核将有等于零的总角动量 $\mathbf{J}=\sum \mathbf{j}$，而如果核有一个奇质子或中子，它的总角动量是最后一个(奇)核子的角动量．对于奇-奇核，这个情况较为复杂(见题 18.13)．

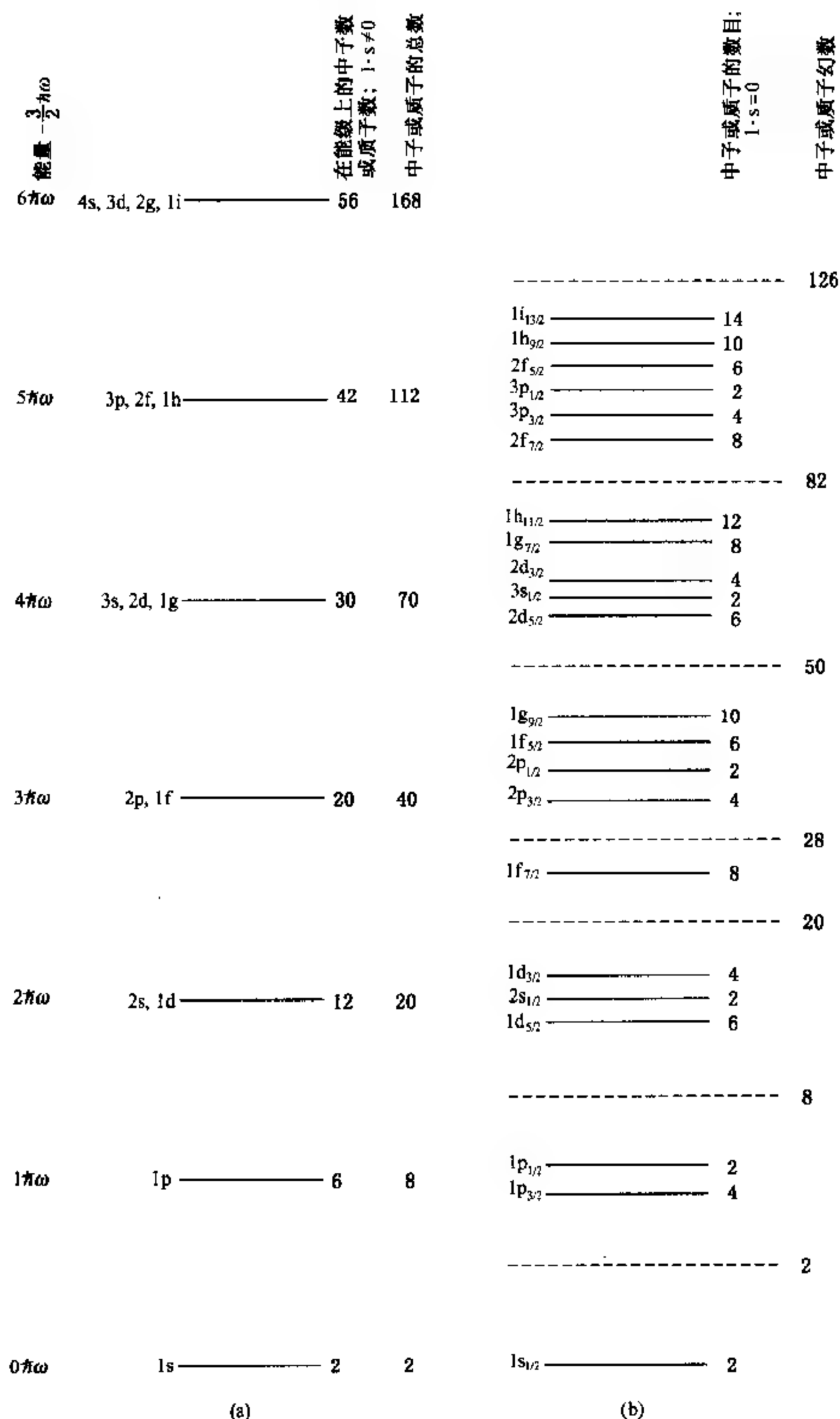


图 18-2

例题详解

注:所要的原子质量取自附录.

18.1 如果假定在$^3_2$He 中两个质子相隔一个核半径,求出它们的库仑排斥能.

解 ☞ 库仑能是

$$E_C = \frac{ke^2}{R} = \frac{ke^2}{r_0(A^{1/3})} = \frac{1.44\ \text{MeV}\cdot\text{fm}}{(1.4\ \text{fm})(3^{1/3})} = 0.71\ \text{MeV}$$

18.2 在$^3_2$He 和$^3_1$H 的结合能的差是多少?

解 ☞ 对于$^3_2$He 的结合能是

$$\begin{aligned} BE_{\text{He}} &= (Zm_p + Nm_n - M)c^2 \\ &= [2(1.007825\text{u}) + 1.008665\text{u} - 3.016030\text{u}](931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 7.72\text{MeV} \end{aligned}$$

对于$^3_1$H 的结合能是

$$BE_{\text{H}} = [1.007825\text{u} + 2(1.008665\text{u}) - 3.016050\text{u}]\cdot(931.5\text{MeV/u}) = 8.48\text{MeV}$$

注$^3_2$He 的结合能低于$^3_1$H 的约为数量(0.76 MeV),它近似地等于在题 18.1 中估计的$^3_2$He 的库仑排斥能量近似相等.

18.3 计算$^{98}_{42}$Mo 中每个核子的结合能.

解 ☞

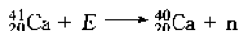
$$BE/A = \frac{(Zm_p + Nm_n - M_{\text{nuc}})c^2}{A}$$

这里对 m_p 和 M_{nuc}用的是原子质量(所以电子质量互相抵消).

$$\begin{aligned} BE/A &= \frac{42(1.007825\text{u}) + 56(1.008665\text{u}) - 97.905409\text{u}}{98}\cdot\left(931.5\ \frac{\text{MeV}}{\text{u}}\right) \\ &= 8.64\ \text{MeV} \end{aligned}$$

18.4 比较在$^{41}_{20}$Ca, $^{42}_{20}$Ca 和$^{43}_{20}$Ca 中移去一个中子所需要的最小能量.

解 ☞ 对于$^{41}_{20}$Ca 移去一个中子的能量可从过程



$$^{41}_{20}\text{Ca} + E \longrightarrow {}^{40}_{20}\text{Ca} + \text{n}$$

求出,有

$$\begin{aligned} E &= (M_{^{40}\text{Ca}} + m_n - M_{^{41}\text{Ca}})c^2 \\ &= (39.962589\text{u} + 1.008665\text{u} - 40.962275\text{u})(931.5\text{MeV/u}) \\ &= 8.36\ \text{MeV} \end{aligned}$$

对于$^{42}_{20}$Ca

$$\begin{aligned} E &= (M_{^{41}\text{Ca}} + m_n - M_{^{42}\text{Ca}})c^2 \\ &= (40.962275\text{u} + 1.008665\text{u} - 41.958625\text{u})\cdot(931.5\text{MeV/u}) \\ &= 11.47\ \text{MeV} \end{aligned}$$

对于$^{43}_{20}$Ca

$$\begin{aligned} E &= (M_{^{42}\text{Ca}} + m_n - M_{^{43}\text{Ca}})c^2 \\ &= (41.958625\text{u} + 1.008665\text{u} - 42.958780\text{u})(931.5\text{MeV/u}) \\ &= 7.93\ \text{MeV} \end{aligned}$$

在$^{42}_{20}$Ca 中移去一个中子的能量要比在$^{43}_{20}$Ca 中移去一个中子的能量多 3.54 MeV,虽然这些中子都在 $1f_{7/2}$壳层之中(它们组成 $1f_{7/2}$轨道).原因是在同样轨道上的中子倾向于成对.于是在有 22 个中子的$^{42}_{20}$Ca 中人们不仅需要正常的中子结合能,而且还需要附加的能量去拆开 $1f_{7/2}$内中子对.在$^{41}_{20}$Ca 和$^{43}_{20}$Ca 中有一个未成对的中子存在,所以需要的能量较小.值得注意的是$^{44}_{20}$Ca 中移去一个中子需要 11.14 MeV(其中有两对中子).

18.5 "镜式"核具有相同的奇数 A,但 N 和 Z 的数值互换.确定当 N 和 Z 相差 1 时两个镜式核的质量差.

解 ☞ 在半经验质量公式中，项 $A-2Z$ 可以记为

$$A-2Z=N+Z-2Z=N-Z$$

所以如果 N 和 Z 相差1，$A-2Z=\pm1$. 如果现在将两个质量 M_{Z+1} 和 M_Z 相减，$(A-2Z)^2$ 项相消，剩下的项是，$A=2Z+1$，

$$M_{Z+1}-M_Z=(m_p-m_n)[(Z+1)-Z]+b_3A^{-1/3}[(Z+1)^2-Z^2]=m_p-m_n+b_3A^{2/3}$$

18.6 $^{23}_{11}Na$ 和 $^{23}_{12}Mg$ 的质量分别为22.989771u和22.994125u. 从这些数据确定出半经验公式中的常数 b_3.

解 ☞ 两个核是镜式核. 从题18.5，

$$M_{Z+1}-M_Z=m_p-m_n+b_3A^{2/3}$$

$$22.994\,125\text{u}-22.989\,771\text{ u}=1.007\,825\text{ u}-1.008\,665\text{ u}+b_3(23)^{2/3}$$

$$b_3=6.42\times10^{-4}\text{ u}=0.598\text{ MeV}$$

18.7 从题17.12，对于大 Z，核的库仑能是

$$E_C=\frac{3}{5}\frac{kZ^2e^2}{R}$$

取 $r_0=1.5$ fm，计算半经验公式中的 b_3.

解 ☞ 对于一个核，$R=r_0A^{1/3}$，而库仑能是

$$E_C=\frac{3}{5}\frac{kZ^2e^2}{r_0A^{1/3}}=b_3\frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

于是

$$b_3=\frac{3}{5}\frac{ke^2}{r_0}=\frac{3(1.44\text{ MeV}\cdot\text{fm})}{5(1.5\text{ fm})}=0.58\text{ MeV}$$

如果 r_0 取作1.4 fm，b_3 的数值变成0.62 MeV. 这个答案与在题18.6中找到的 b_3 值相近.

18.8 利用液滴模型对于奇数 A，找出最稳定的同量异位素.

解 ☞ 对于奇数 A，在半经验质量公式中 $b_5=0$，而结合能是

$$BE=b_1A-b_2A^{2/3}-b_3Z^2A^{-1/3}-b_4(A-2Z)^2A^{-1}$$

(A=常数)最稳定的同量异位素有最大的结合能. 可由关系 $\mathrm{d}(BE)/\mathrm{d}Z=0$ 找出.

$$\frac{\mathrm{d}(BE)}{\mathrm{d}Z}=-2b_3ZA^{-1/3}-4b_4(A-2Z)A^{-1}=0$$

$$Z=\frac{4b_4}{2b_3A^{-1/3}+8b_4A^{-1}}=\frac{A}{\frac{b_3}{2b_4}A^{2/3}+2}$$

利用 $b_3=0.58$ MeV 和 $b_4=19.3$ MeV，得到

$$Z=\frac{A}{0.015\,A^{2/3}+2}$$

18.9 对于 $A=25,43,77$，找出最稳定的核.

解 ☞ 由题18.8的结果，当 $A=25$，

$$Z=\frac{A}{0.015A^{2/3}+2}=\frac{25}{(0.015)(25)^{2/3}+2}=11.7\approx12$$

$^{25}_{12}Mg$ 事实上是稳定的，而实验上找到 $^{25}_{13}Al$ 和 $^{25}_{11}Na$ 是不稳定的.

对于 $A=43$，

$$Z=\frac{43}{(0.015)(43)^{2/3}+2}=19.7\approx20$$

而从实验上找到 $^{43}_{20}Ca$ 是稳定的，而 $^{43}_{19}K$ 和 $^{43}_{21}Sc$ 是不稳定的.

对于 $A=77$

$$Z=\frac{77}{(0.015)(77)^{2/3}+2}=33.9\approx34$$

而从实验上找到 $^{77}_{34}Se$ 是稳定的，而 $^{77}_{33}As$ 和 $^{77}_{35}Br$ 是不稳定的.

18.10 证明在一个给定 j 的轨道，最多只有 $2j+1$ 个核子. 指出对于p态($l=1$)这与泡利原

理允许 $2(2l+1)=6$ 个核子的事实一致.

解 ☞ 对于给定 j,

$$m_j = j,\ j-1,\cdots,\ -(j-1),\ -j$$

一共有 $2j+1$ 个值.于是泡利原理允许在这个轨道上有 $2j+1$ 个核子.

p 态划分为 $p_{3/2}$轨道,它可以包含 $2j+1=2(3/2)+1=4$ 个核子,并且一个 $p_{1/2}$轨道,它可以包含 $2j+1=2(1/2)+1=2$ 个核子.总共是 6 个核子.

18.11 对于 $A=50$, 已知质量是 $^{50}_{21}Sc$, 49.951 730 u; $^{50}_{22}Ti$, 49.944 786 u; $^{50}_{23}V$, 49.947 164 u; $^{50}_{24}Cr$, 49.946 055 u; $^{50}_{25}Mn$, 49.954 215 u. 从这些数据估计在半经验质量公式中成对项的强度,常数 b_5.

解 ☞ 对于固定的偶数 A 和奇数 Z($Z+1$ 是偶数,等),半经验质量公式可以记作

$$M(Z) = a_1Z^2 + a_2Z + a_3 + b_5A^{-3/4}$$

$$M(Z+1) = a_1(Z+1)^2 + a_2(Z+1) + a_3 - b_5A^{-3/4}$$

$$M(Z+2) = a_1(Z+2)^2 + a_2(Z+2) + a_3 + b_5A^{-3/4}$$

$$M(Z+3) = a_1(Z+3)^2 + a_2(Z+3) + a_3 - b_5A^{-3/4}$$

这里 a_1, a_2, a_3 是常数.取 3 级差分

$$M(Z+3) - 3M(Z+2) + 3M(Z+1) - M(Z) = -8b_5A^{-3/4}$$

将它用到 $Z=21$ 情况(49u 部分已消去)

$$0.946\,055\text{u} - 3(0.947\,164\text{ u}) + 3(0.944\,786\text{ u}) - 0.951\,730\text{ u} = -8(50^{-3/4})b_5$$

从这里

$$b_5 = \frac{50^{3/4}}{8}(0.012\,809\text{ u}) = 0.0301\text{ u} = 28.0\text{ MeV}$$

如果我们考虑另一个 3 级差分

$$M(Z+4) - 3M(Z+3) + 3M(Z+2) - M(Z+1) = +8b_5A^{-3/4}$$

我们得到

$$b_5 = \frac{50^{3/4}}{8}(0.012\,756\text{ u}) = 0.0300\text{ u} = 27.9\text{ MeV}$$

这两个对 b_5 的估计看来是非常接近的.所采用的 b_5 值是 33.5 MeV.

18.12 寻找(a)$^{15}_{8}O$, (b)$^{39}_{19}K$, (c)$^{20}_{10}Ne$ 的基态动量矩.

解 ☞ 由壳层模型给出的基态组态见图 18-3.

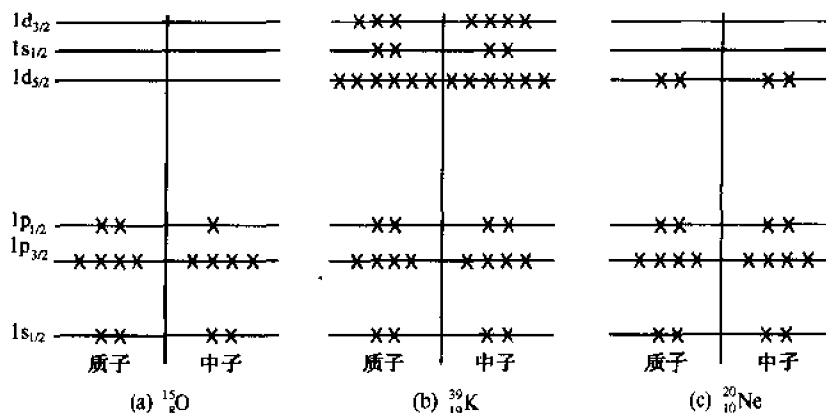


图 18-3

(a)除去 $1p_{1/2}$中子,全部其余核子成对,于是在基底态的总角动量是 $J=1/2$.

(b)除去一个 $1d_{3/2}$质子;全部其余核子成对;总角动量是 $J=3/2$.

(c)全部核子成对; $J=0$.

18.13 对于$^{32}_{15}P$其基底态角动量可能值是什么？

解 ☞ 对$^{32}_{15}P$的壳层模型基底态描述是假定最低能级是全部填满的，如图18-4所示．在$^{32}_{15}P$的模型中的全部核子除去$2s_{1/2}$质子和$1d_{3/2}$中子之外，其余都成对，给出零动量矩．在这种图景下$^{32}_{15}P$的基底态角动量必然是$j=\frac{1}{2}$和$j=\frac{3}{2}$粒子的角动量的矢量和．对于质子，我们有可能的m_j值

$$m_{1/2}=1/2,\ -1/2$$

而对于中子

$$m_{3/2}=\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$$

于是

$$M_J=m_{1/2}+m_{3/2}=\begin{cases}2, & 1, & 0, & -1, & -2\\ & 1, & 0, & -1 &\end{cases}$$

上面一行M_J值对应于$J=2$；下面一行对应于$J=1$．

$^{32}_{15}P$的基底态的实验结果是$J=1$；$J=2$对应于第一激发态．

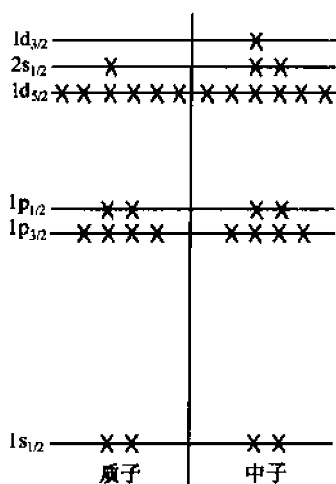


图18-4

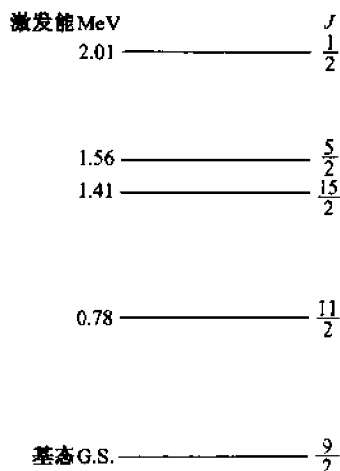


图18-5

18.14 $^{209}_{82}Pb$的前四个激发态见图18-5．利用壳层模型，阐明这个谱是单粒子激发谱．

解 ☞ 同位素$^{208}_{82}Pb$有82个质子和126个中子，是双重幻数．如图18-6(a)所示，$^{209}_{82}Pb$有一个$^{208}_{82}Pb$密实和一个附加中子，在$2g_{9/2}$轨道．$\frac{11}{2}$，$\frac{15}{2}$，$\frac{5}{2}$和$\frac{1}{2}$激发态对应于壳层模型轨道中的中子激发态$1i_{11/2}$，$1j_{15/2}$，$3d_{5/2}$和$4s_{1/2}$[从图18-6(b)到(e)]

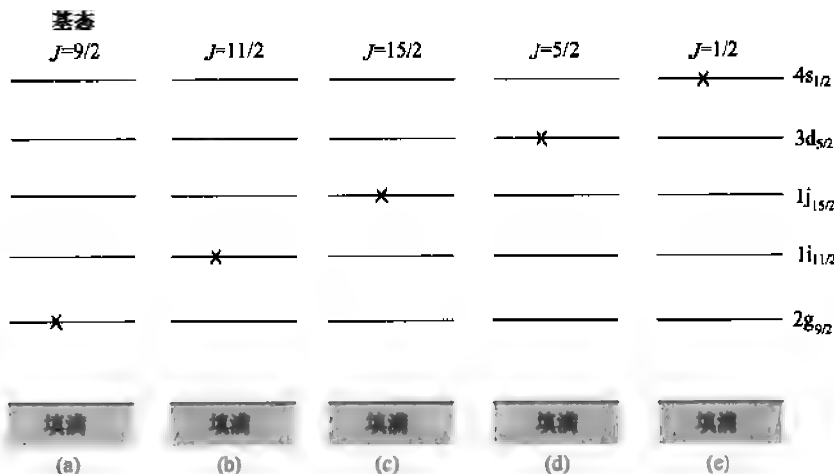


图18-6

18.15　$^{40}_{20}Ca$，$^{41}_{20}Ca$ 和 $^{39}_{20}Ca$ 的质量分别为 39.962 589u，40.962 275 u 和 38.970 691 u. 计算在 $1d_{3/2}$ 和 $1f_{7/2}$ 中子壳层之间的能量差(即对应于中子幻数 20 能隙).

解　从壳层模型，$^{39}_{20}Ca$ 在 $1d_{3/2}$ 壳层少了一个中子，$^{20}_{40}Ca$ 填满了这个壳层而 $^{41}_{20}Ca$ 在 $1f_{7/2}$ 壳层添了一个中子.

$1d_{3/2}$ 中子在 ^{40}Ca 中的结合能是

$$BE_1 = (M_{^{39}Ca} + m_n - M_{^{40}Ca})c^2$$
$$= (38.970\ 691\ u + 1.008\ 665\ u - 39.962\ 589\ u)\cdot(931.5\ MeV/u)$$
$$= 15.62\ MeV$$

而 $1f_{7/2}$ 中子在 ^{41}Ca 中的结合能是

$$BE_2 = (M_{^{40}Ca} + m_n - M_{^{41}Ca})c^2$$
$$= (39.962\ 589\ u + 1.008\ 665\ u - 40.962\ 275\ u)(931.5\ MeV/u)$$
$$= 8.36\ MeV$$

结合能之差是 $1f_{7/2}$ 和 $1d_{3/2}$ 壳层的能量间隔 δ，

$$\delta = BE_1 - BE_2 = 15.62\ MeV - 8.36\ MeV = 7.26\ MeV$$

18.16　考虑一个壳层模型，其中核子成对地处于等间隔能级中. 如果开始有相等数目的中子和质子. 现将 n 对质子换成中子并且把它们送到中子轨道上去，求出所需的能量.

解　这个问题图解在图 18-7. 如果最终的核子有 N 个中子和 Z 个质子，我们定义核子差 $n \equiv N - Z$，它是准备由质子能级到中子能级运送的核子对数的两倍. 如果全部能级由一个能量 δ 相隔，生成最后核所需要的总能量是

$$E = 2\delta(1) + 2\delta(3) + 2\delta(5) + \cdots + 2\delta(n-1)$$
$$= 2\delta[1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1)] = 2\delta\frac{n^2}{4}$$
$$= \frac{\delta}{2}(N-Z)^2 = \frac{\delta}{2}(A-2Z)^2$$

这一项与半经验质量公式中的 $b_4(A-2Z)^2A^{-1}$ 项直接相关，它是中子或质子多余时的能量表达式.

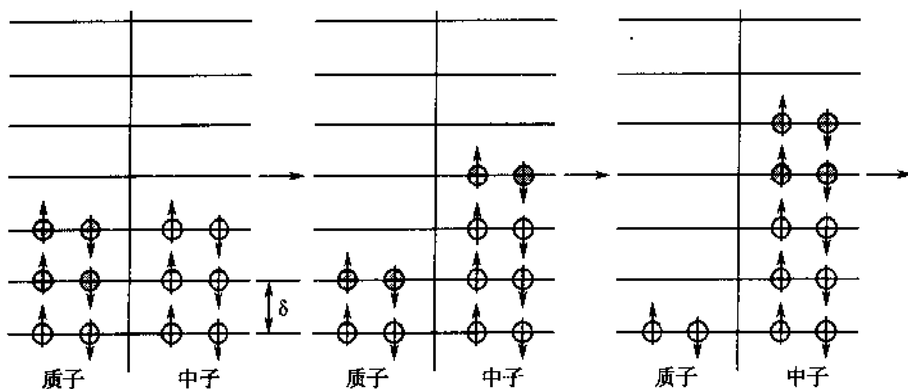


图 18-7

补充习题

注：在某些问题中，你可以利用附录中的原子质量.

18.17　对于(a)$^{4}_{2}He$，(b)$^{12}_{6}C$，(c)$^{40}_{20}Ca$，(d)$^{202}_{80}Hg$ 计算其每个核子的结合能.

答案：(a)7.07 MeV；(b)7.68 MeV；(c)8.55 MeV；(d)7.90 MeV

18.18　在 $^{17}_{8}O$ 移去最后的紧束缚中子，计算所需的能量.

答案：4.14 MeV

18.19　从$^{22}_{10}Ne$(21.991 385 u)和$^{22}_{11}Na$(21.994 437 u)的质量确定半经验质量公式中的 b_3 值.将此值与题18.6中求出的值相比较.

答案:0.484 MeV

18.20　对于 $A=57$,找出最稳定的核.

答案:$Z=26$($^{57}_{26}Fe$)

18.21　找出(a)$^{41}_{20}Ca$,(b)$^{80}_{36}Kr$,(c)$^{91}_{40}Zr$ 的基底态动量矩.

答案:(a)7/2;(b)0;(c)5/2

18.22　给出$^{13}_{6}C$的下述各态的总角动量:(a)基底态,全部中子和质子轨道充填至 $1p_{3/2}$而额外中子在 $1p_{1/2}$轨道;(b)一个激发态,它与(a)基本相同但额外的中子激发到 $2s_{1/2}$轨道;(c)一个激发态,它与(a)基本相同但额外的中子在 $1d_{5/2}$轨道;(d)激发态,质子轨道充填到 $1p_{3/2}$;而 2 个中子在 $1s_{1/2}$轨道,3 个中子在 $1p_{3/2}$轨道和 2 个中子在 $1p_{1/2}$轨道.

答案:(a)1/2;(b)1/2;(c)5/2;(d)3/2

18.23　质量过剩

$$\delta\equiv[M(\text{以 u 为单位})-A(\times 1\ \text{u})]\times(931.5\ \text{MeV/u}),$$

对于$^{15}_{8}O$,$^{16}_{8}O$,和$^{17}_{8}O$,δ 分别为 2859.9keV,-4736.6keV 和 -807.7keV.从这些数据计算在 $1p_{1/2}$和 $1d_{5/2}$中子壳层间的能量差(即对应于中子幻数 8 的能隙).

答案:11.53 MeV

第19章　不稳定核的衰变

19.1　核衰变

如同在第18章所讨论,核有激发态.这些激发态由于放出高能光子直接衰变为基态或较低能量态.此外,在激发态和基态中的核可以瞬时放出其他粒子以达到更低的能量组态.

当初次研究核衰变时,衰变产物称之为γ射线,α粒子,β^-粒子和β^+粒子.没有多久就认识到这些衰变产物不是新的实体,γ射线是高能光子,α粒子是氦核,β^-粒子是电子,而β^+粒子是正电子.

在不同的反应中,通常的守恒律:质量-能量守恒,电荷守恒,动量守恒和动量矩守恒总是成立的.但在核衰变中,找到核子守恒律也成立,衰变前后的核子数必须相等.

19.2　统计辐射衰变规律

在典型的辐射衰变中,一个初始的不稳定核,称为亲代,放出粒子并且衰减成为一个称为子代核,实际上,子代的生出来源于亲代的灭亡.子代可以是同样的核但在较低的能态,这是γ衰变的情况;或者是完全新的核,这是α衰变或β衰变的情况.不管放出什么类型的粒子,全部核衰变满足同样的放射衰变规律.如果初始有N_0个不稳定的亲代核存在,经过时间t之后剩下的亲代核数是(题19.1)

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{19.1}$$

常数λ称为衰变常数,与所研究的衰变过程有关.

方程(19.1)是统计的,并非是决定性的,规律;它表示经过时间t之后剩下的亲代的期望数.但如果N_0非常大(在应用中经常是这样),留存下来的实际数和期望数只相差N_0的一个很小的部分.

某个指定样本衰变的快慢通常由半寿命$T_{1/2}$测量,$T_{1/2}$定义作一个时间区间,亲代核数经过它变为开始时的一半.半寿命易于利用λ求出

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \tag{19.2}$$

于是,开始N_0个核,在时间$T_{1/2}$之后留下$N_0/2$个核,而在时间$2T_{1/2}$之后留下$N_0/4$个核,等等.

测量样本衰变快慢的另一个量是核的平均寿命T_m,有

$$T_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \tag{19.3}$$

(见题19.7)

描述后代核(假定它们是稳定的)的增长规律由式(19.1)得到,

$$N_D = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}) \tag{19.4}$$

在很多衰变中子代核也是不稳定的并且进一代分解为孙代;这些情况将在例题中处理.

样本的活度定义为分解速率的绝对值

$$活度 = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N \tag{19.5}$$

测量分解速率(或活度)的单位是居里(Ci),其定义是$1Ci = 3.700\times10^{10}$蜕变/s或者是贝克勒耳(becquerel, SI单位制,Bq)其定义是1 Bq=1 蜕变/s.

19.3　γ衰变

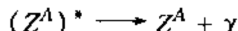
在γ衰变中,一个原始时处于激发态的核变换为较低能量态,并且在这个过程中发出光

子，称为γ射线．所发出的γ射线有离散的能量，它表明核有离散的能级．γ射线光子的能量由通常的表达式给出，

$$h\nu = E_u - E_l \tag{19.6}$$

对照原子变换中发出的光子，其中能量是几个 eV 的数量级，γ射线的能量从 10 个 keV 到 MeV 量级．

因为γ射线光子不带有电荷或质量，核的电荷和核子数在γ衰变中不改变．如果激发核记以$(Z^A)^*$，到基态可以形式地记为

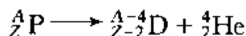


$$(Z^A)^* \longrightarrow Z^A + \gamma$$

绝大多数的激发态在经受γ衰变时有10^{-14}s 量级的非常小的半衰期，比激发电子态的半衰期要小很多．但某些核的激发态非常长久，而它们的半衰期易于测量．这些激发称为同质异能的，而激发态称为同质异能态．

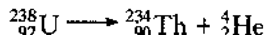
19.4　α衰变

在α衰变中，在核中放出一个α粒子．因α粒子是一氦核，亲代核损失了两个质子和两个中子．于是它的原子序 Z 递减 2，而质量数 A 递减 4，所以子代 D 和亲代 P 是不同的化学元素．应用电荷和核子数守恒，我们可以将α衰变形式上记为



$${}^{A}_{Z}\mathrm{P} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{D} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

例如



$${}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

在亲代是静止的系统中，按照能量守恒有

$$M_P c^2 = M_D c^2 + M_\alpha c^2 + K_D + K_\alpha \tag{19.7}$$

这里 K_D 和 K_α 分别是后代核和α粒子的动能，而 M_p，M_D，和 M_α 分别是亲代，子代，和α粒子的质量．因为动能不会为负，α衰变只在条件下发生．

$$M_P \geqslant M_D + M_\alpha \tag{19.8}$$

衰变前后，能量，动量必须守恒．因为α衰变的结果只有两个粒子，能量和动量的两个守恒条件惟一地确定了α粒子和子代核的动能（以及动量）．如果质量数为 A 的亲代核在静止状态下衰变，α粒子的动能是（见题 19.15）

$$K_\alpha = \left(\frac{A-4}{A}\right)Q \tag{19.9}$$

这里分解能 Q 是反应中释放出来的总能量：

$$Q = (M_P - M_D - M_\alpha)c^2 \tag{19.10}$$

量 Q 在任何α衰变过程中是个常数，并且对于任何观察者都有相同的值．在亲代核静止的坐标系中，

$$Q = K_D + K_\alpha \tag{19.11}$$

19.5　β衰变和中微子

一个可能发生的核过程是核电荷 Ze 改变，但核子数 A 保持不变．这些情况可能在核放出一个电子（β^-衰变），放出一个正电子（β^+衰变），或者俘获一个核内电子（电子俘获）时发生．在这些过程中，质子转换为中子，或者反过来．

在每一个这样的过程中，还有一个额外粒子，称为中微子（ν），是衰变产物之一．中微子的性质是：电荷 0；静止质量≈0；内禀自旋$\frac{1}{2}$，并且，与一切无质量粒一样，它有速率 c（光速）．

W．泡利在 1930 年为了在β衰变中保留能量守恒和动量守恒提出了中微子的存在．例如，中微子β衰变是



$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \tilde{\nu} \tag{19.12}$$

如果中微子不是衰变产物的一部分，从能量守恒和动量守恒得到，电子将以单能量射出，如同上述 α 衰变中所讨论的一样. 但实验上找到的射出电子其能量从 0 到最大能量都有分布，如图 19-1 所示. 此外，因为开始时只有一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子，只产生自旋都是 $\frac{1}{2}$ 的两个粒子将与动量矩守恒相抵触. 直到 1956 年在 C. L. Cowan 和 F. Reines 的实验中才实际观察到了中微子. 另外，那时的实验指出中微子的质量不是严格的零，而是一个相当小的非零值，如果这个是正确的，它将对基本粒子的图像有重要的影响.

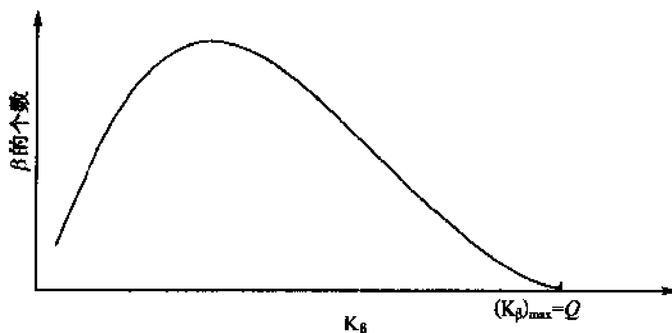
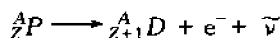


图 19-1

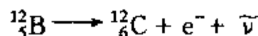
在式(19.12)中，产生的中微子记作 $\tilde{\nu}$ 而不是 ν. 这是因为实际上有两种不同类型的中微子，中微子(ν)和反中微子($\tilde{\nu}$). 反中微子出现在 β^- 衰变中，而中微子出现在其他的 β 过程中. 反粒子将进一步在第 22 章讨论.

一般，β^- 衰变可表示为



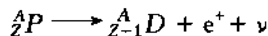
$${}^{A}_{Z}P \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}D + e^- + \tilde{\nu}$$

一个典型的例子是



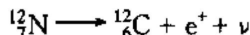
$${}^{12}_{5}B \longrightarrow {}^{12}_{6}C + e^- + \tilde{\nu}$$

于是，在 β^- 衰变中，一个中子转换成一个质子. 在 β^+ 衰变中，放出一个正电子，



$${}^{A}_{Z}P \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}D + e^+ + \nu$$

所以一个质子转换成一个中子. β^+ 衰变的一个例子是



$${}^{12}_{7}N \longrightarrow {}^{12}_{6}C + e^+ + \nu$$

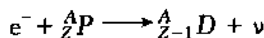
从能量守恒看来，在亲代核处于静止的系统中，对于 β^- 和 β^+ 这两种衰变(电子和正电子的质量相等)我们有

$$M_P c^2 = M_D c^2 + m_e c^2 + K_T$$

从而得到分解能

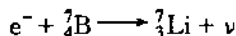
$$Q = K_T = (M_P - M_D - m_e)c^2$$

在电子俘获中，原子内电子(通常是 K 层电子)由一个核子俘获，不放出带电粒子. 代替的是，电子俘获发出由外部电子转换到空的内部能级的特征 X 射线光子(看第 16 章)之后，发射出中微子. 在电子俘获中，一个质子转换为一个中子. 并且，发出的 X 射线是子代原子，而不是亲代原子的特征，因为它们是电子俘获以后产生的. 一个电子俘获过程可以记作



$$e^- + {}^{A}_{Z}P \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}D + \nu$$

其中一个例子是



$$e^- + {}^{7}_{4}B \longrightarrow {}^{7}_{3}Li + \nu$$

需要强调的是，在 β 衰变或电子俘获中在核内并不存在电子或正电子. 核仅由质子和中子复合而成. 电子的产生或吸收使得质子转换为中子或相反，它影响到核子进入低能态的重排.

在下面问题中，除非另有声明，全部给定质量值是原子质量.

例题详解

注:这里所用的原子质量取自附录.

19.1　导出衰变规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$.

解　在时间区间 dt 内衰变的核数 $-dN$ 正比于时间区间和正比于当时存在的核数 N. 于是

$$-dN=\lambda N dt$$

这里 λ 是比例常数而引进负号是因为 N 是递减的. 将这个表达式积分生成衰变规律.

19.2　$^{226}_{88}Ra$ 的半衰期是1622年, 1 g Ra 的活度是多少?

解　1 g镭的原子数

$$N=(1\ g)\left(\frac{1\ mol}{226\ g}\right)\left(6.025\times10^{23}\ \frac{原子}{mol}\right)=2.666\times10^{21}$$

衰变常数与半衰期的关系是

$$\lambda=\frac{0.693}{T_{1/2}}=\left(\frac{0.693}{1622年}\right)\left(\frac{1年}{365天}\right)\left(\frac{1天}{8.64\times10^4 s}\right)$$
$$=1.355\times10^{-11}s^{-1}$$

得到活度是

$$活度=\lambda N=(1.355\times10^{-11}s^{-1})(2.666\times10^{21})=3.612\times10^{10}蜕变数/s$$

居里的定义是 1 Ci $=3.700\times10^{10}$蜕变数/s. 它近似等于上面所找到的值.

19.3　在多长的距离上能使5eV的中子束强度缩减为原来的$\frac{1}{2}$?

解　束中的中子速率由 $\frac{1}{2}mv^2=K$ 求出

$$\frac{1}{2}(1.67\times10^{-27}\ kg)v^2=(5\ eV)\left(\frac{1.6\times10^{-19}\ J}{1\ eV}\right)$$
$$v=31.0\ km/s$$

在 $T_{1/2}=12.8$ min 的时间内, 束中的中子衰变了一半. 未衰变的中子在这个时间中传播过的距离是

$$d=vt=(31.0\ km/s)(12.8\ min)(60\ s/min)=23,800\ km$$

或大约2个地球直径.

19.4　5 mg 的^{22}Na($T_{1/2}=2.60$年)衰变到剩下1 mg, 需要多少时间?

解　因为样品的质量正比于样品的原子数我们可以记

$$m=m_0e^{-\lambda t}=m_0e^{-(0.693/T_{1/2})t}$$
$$1\ mg=5\ mg\ e^{(-0.693/T_{1/2})t}$$
$$e^{(0.693/2.60年)t}=5$$

取双方的对数

$$\frac{0.693t}{2.60年}=\ln5=1.61\quad 或\quad t=6.04年$$

19.5　如果 3×10^{-9} kg 放射性$^{200}_{79}Au$有活度58.9 Ci, 其半衰期是什么?

解　3×10^{-9} kg的$^{200}_{79}Au$的原子数是

$$N=(3\times10^{-9}kg)\left(\frac{1\ kmol}{200\ kg}\right)\left(6.025\times10^{26}\ \frac{原子}{kmol}\right)=9.04\times10^{15}原子$$

活度是

$$活度=(58.9\ Ci)\left(\frac{3.7\times10^{10}蜕化数/s}{1\ Ci}\right)=2.18\times10^{12}\ \frac{蜕化数}{s}$$

衰变常数从下述关系找到:

$$活度=\lambda N$$
$$\lambda=\frac{2.18\times10^{12}s^{-1}}{9.04\times10^{15}}=2.41\times10^{-4}s^{-1}$$

最后

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{2.41\times10^{-4}\mathrm{s}^{-1}}=2.88\times10^{3}\mathrm{s}-48\ \mathrm{min}$$

19.6　每隔5分钟测定${}^{55}_{24}\mathrm{Cr}$样本的活度为19.2,7.13,2.65,0.99和0.37毫居里.${}^{55}_{24}\mathrm{Cr}$的半衰期是多少?

解　☞ 活度$=\lambda N=\lambda N_0 e^{-\lambda t}$

取双方的自然对数,我们有

$$\ln(活度)=\ln(\lambda N_0 e^{-\lambda t})=\ln(\lambda N_0)-\lambda t$$

于是ln(活度)随着t线性变化,斜率为$-\lambda$.列出数据如下

时间/min	0	5	10	15	20
活度/mCi	19.2	7.13	2.65	0.99	0.37
ln(活度)	2.95	1.96	0.974	−0.010	−0.994

我们得到在图19-2所示的直线,从这直线求出

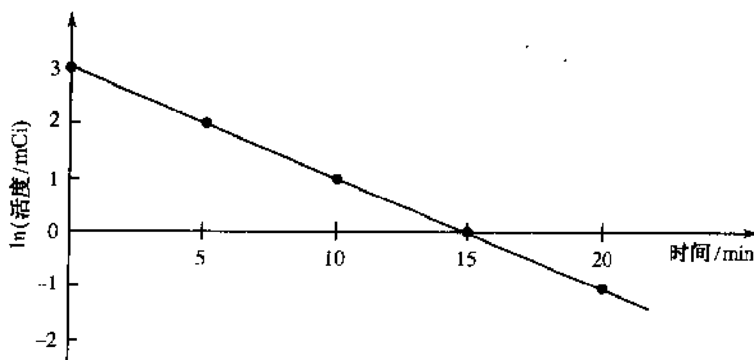


图 19-2

$$|斜率|=\lambda=0.197\ \mathrm{min}^{-1}$$

最终,

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{0.197\ \mathrm{min}^{-1}}=3.52\ \mathrm{min}$$

19.7　证明放射性核的平均寿命是$T_m=1/\lambda$.

证　☞ 如果刚准备出的样品有N_0个核,它们全部衰变的平均寿命是

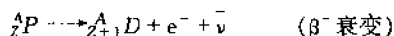
$$T_m=\frac{\int_{N_0}^{0}t\,\mathrm{d}N}{\int_{N_0}^{0}\mathrm{d}N}=\frac{1}{-N_0}\int_{N_0}^{0}t\,\mathrm{d}N$$

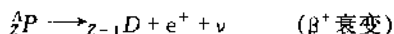
从$N=N_0e^{-\lambda t}$,我们有$\mathrm{d}N=-\lambda N_0 e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$,而积分限从$N_0$,0更换为$t$变量的0,∞.于是

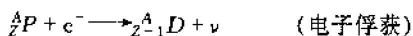
$$T_m=\frac{1}{-N_0}\int_0^{\infty}t(-\lambda N_0 e^{-\lambda t}\mathrm{d}t)=\lambda\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)=\frac{1}{\lambda}$$

19.8　用亲代和子代静止质量,确定β^-衰变,β^+衰变和电子俘获的Q-值.

解　☞ 这三个反应是(P=亲代,D=后代)







相应的质量-能量关系是,核质量等于原子质量减去电子质量,

$$\left.\begin{aligned}(M_P - Zm_e)c^2 &= [M_D - (Z+1)m_e]c^2 + m_e c^2 + Q\\ Q &= (M_P - M_D)c^2\end{aligned}\right\}(\beta^- \text{衰变})$$

$$\left.\begin{aligned}(M_P - Zm_e)c^2 &= [M_D - (Z-1)m_e]c^2 + m_e c^2 + Q\\ Q &= (M_P - M_D - 2m_e)c^2\end{aligned}\right\}(\beta^+ \text{衰变})$$

$$\left.\begin{aligned}(M_P - Zm_e)c^2 + m_e c^2 &= [M_D - (Z-1)m_e]c^2 + Q\\ Q &= (M_P - M_D)c^2\end{aligned}\right\}(\text{电子俘获})$$

19.9　在${}^3_1\text{H}$的β^-衰变中发出的电子的最大能量是多少？

解　这个反应是



$${}^3_1\text{H} \longrightarrow {}^3_2\text{He} + e^- + \tilde{\nu}$$

从题 19.8,

$$\begin{aligned}Q &= (M_{\text{H}} - M_{\text{He}})c^2\\ &= (3.016\,050\ \text{u} - 3.016\,030\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 0.0186\ \text{MeV} = K_{\text{He}} + K_e + K_\nu\end{aligned}$$

因为中微子质量是零，而$M_{\text{He}} \gg m_e$，He 核的动能可以略去，所以 0.0186 MeV 的能量由电子及中微子分享．当中微子的能量是零，电子的动能达到最大值 0.0186 MeV.

19.10　求在生成反应 $\tilde{\nu} + p \longrightarrow n + e^+$ 中的反中微子的最小能量．

解　从质量-能量守恒，

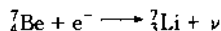
$$E_\nu + m_p c^2 = m_n c^2 + m_e c^2 + K_n + K_e$$

当射出的中子和正电子的动能都是零时，所需的中微子能量最小：

$$E_{\nu_{\min}} + 938.2\ \text{MeV} = 939.5\ \text{MeV} + 0.5\ \text{MeV} \quad \text{或}\ E_{\nu_{\min}} = 1.8\ \text{MeV}$$

19.11　当${}^7_4\text{Be}$在静止时作电子俘获，确定子代和中微子的能量和动量．

解　电子俘获反应是



$${}^7_4\text{Be} + e^- \longrightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu$$

从题 19.8

$$Q = (M_{\text{Be}} - M_{\text{Li}})c^2 = (7.016929\ \text{u} - 7.016004\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 0.862\ \text{MeV}$$

这个能量在中微子和${}^7_3\text{Li}$核之间分配．但因为${}^7_3\text{Li}$核的质量大而中微子的静止质量为 0，中微子几乎占有全部能量，所以

$$E_\nu \approx 0.862\ \text{MeV}$$

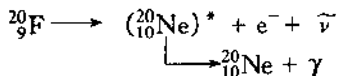
设${}^7_4\text{Be}$核初始时静止，中微子和${}^7_3\text{Li}$核的动量大小必须相等．利用 $p_\nu = E_\nu/c$，我们于是有

$$p_\nu = p_{\text{Li}} = 0.862\ \text{MeV}/c$$

${}^7_3\text{Li}$核的动能现在可以求出，

$$\begin{aligned}K_{\text{Li}} &= \frac{p_{\text{Li}}^2}{2M_{\text{Li}}} = \frac{(p_{\text{Li}}c)^2}{2M_{\text{Li}}c^2} = \frac{(0.862\ \text{MeV})^2}{2(7.02\ \text{u} \times 931.5\ \text{MeV/u})}\\ &= 5.68 \times 10^{-5}\ \text{MeV} = 56.8\ \text{eV}\end{aligned}$$

19.12　${}^{20}_9\text{F}$衰变为${}^{20}_{10}\text{Ne}$的基态如下：



$${}^{20}_9\text{F} \longrightarrow ({}^{20}_{10}\text{Ne})^* + e^- + \tilde{\nu}$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \ \ \llcorner\!\!\longrightarrow {}^{20}_{10}\text{Ne} + \gamma$$

这里$({}^{20}_{10}\text{Ne})^*$是${}^{20}_{10}\text{Ne}$的激发态．如果射出电子的最大动能是 5.4 MeV 而 γ 射线的能量是 1.6 MeV，确定${}^{20}_9\text{F}$的质量($M_{\text{Ne}} = 19.99244$ u)．

解　将质量-能量守恒用到各个反应中得到(在极限情况下，中微子的能量是零，而$({}^{20}_{10}\text{Ne})^*$和${}^{20}_{10}\text{Ne}$的反跳能量可以忽略)

$$(M_F - 9m_e)c^2 = (M_{\text{Ne}^*} - 10m_e)c^2 + m_e c^2 + K_e$$

或

$$M_F c^2 = M_{\text{Ne}^*}c^2 + K_e$$

$$M_{Ne^*}c^2 = M_{Ne}c^2 + E_\gamma$$

重新排列这两个表达式，我们有

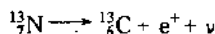
$$M_F c^2 = M_{Ne}c^2 + E_\gamma + K_e$$

$$M_F = 19.99244\ \text{u} + (1.6\ \text{MeV} + 5.4\ \text{MeV})\left(\frac{1\ \text{u}}{931.5\ \text{MeV}}\right)$$

$$= 20.000\ \text{u}$$

19.13 对于$^{13}_{7}$N的β^+衰变求出在表达式$R = r_0A^{1/3}$(17.5节)的γ_0数值.一个β^+的最大能量是1.19 MeV.

解 ☞ 由$^{13}_{7}$N的β^+衰变能量守恒，



$$^{13}_{7}\text{N} \longrightarrow {}^{13}_{6}\text{C} + e^+ + \nu$$

我们有

$$M^{13}{}_{N}c^2 = M^{13}{}_{C}c^2 + m_ec^2 + K_e + K_\nu$$

将由液滴模型得到的奇数 A 核的质量，其中库仑项用明显写出的形式(题17.12)，代进上述表达式，我们有

$$7m_pc^2 + 6m_nc^2 - b_1A + b_2A^{2/3} + \frac{3}{5}ke^2\frac{(7)(6)}{R} + \frac{b_4}{A}$$

$$= 6m_pc^2 + 7m_nc^2 - b_1A + b_2A^{2/3} + \frac{3}{5}ke^2\frac{(6)(5)}{R}$$

$$+ \frac{b_4}{A} + m_ec^2 + K_e + K_\nu$$

$$\frac{3}{5}ke^2\frac{(42-30)}{R} = (m_n - m_p + m_e)c^2 + K_e + K_\nu$$

如果β^+的动能为最大，中微子的动能必然是零.于是

$$\frac{3}{5}ke^2\frac{12}{R} = (m_n - m_p + m_e)c^2 + K_e$$

$$\frac{3}{5}(1.44\ \text{MeV}\cdot\text{fm})\frac{12}{R} = 1.80\text{MeV} + 1.19\ \text{MeV}$$

$$R = 3.47\ \text{fm}$$

如果我们取$R = r_0A^{1/3} = r_0(13)^{1/3} = 2.35r_0$，于是

$$r_0 = \frac{3.47\ \text{fm}}{2.35} = 1.48\ \text{fm}$$

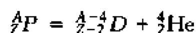
这个数值与17.5节所给的$r_0 = 1.4$ fm符合得很好.

19.14 对于$A = 104$，证明质量对原子序Z图上指出稳定的同量异位素是$^{104}_{44}$Ru和$^{104}_{46}$Pd.

解 ☞ 如同图19-3所示，$^{104}_{42}$Mo和$^{104}_{43}$Tc经历β^-衰变最终成为$^{104}_{44}$Ru.这是从能量上看是一个可实现过程，因为$^{104}_{42}$Mo比$^{104}_{43}$Tc重，而$^{104}_{43}$Tc又比$^{104}_{44}$Ru重(如果$^{104}_{44}$Ru有β^-衰变，它将变成$^{104}_{45}$Rh，后者比$^{104}_{44}$Ru重从而这个衰变是禁戒的.)又知道$^{104}_{45}$Rh衰变为$^{104}_{44}$Ru和$^{104}_{46}$Pd；而$^{104}_{48}$Cd衰变为$^{104}_{47}$Ag，而它又衰变为$^{104}_{46}$Pd.这些过程全是在能量上允许的并且表明$^{104}_{46}$Pd是稳定的.注意$^{104}_{44}$Ru的质量大于$^{104}_{46}$Pd的质量.但是相应的衰变过程是禁戒的，因为它必须形成$^{104}_{45}$Rh作为中间核，而如同前面讲过的，这个过程是禁戒的.可以看到这个数据非常接近于液滴模型指出的A=常数的抛物线形状.

19.15 用反应能Q写出在α衰变中发射出的α粒子的动能.

解 ☞ α衰变反应具有形式



$$^{A}_{Z}P = {}^{A-4}_{Z-2}D + {}^{4}_{2}\text{He}$$

假定亲代原始时处于静止，我们从动量守恒得到$p_D = p_\alpha$.因为动能比起亲代的静能来是很小的，我们可以利用非相对论关系$K = p^2/2M$而求得

$$\frac{K_D}{K_\alpha} = \frac{M_\alpha}{M_D} \approx \frac{4}{A-4}$$

这里A是亲代的质量数.反应能Q是

$$Q = K_D + K_\alpha = \frac{4}{A-4}K_\alpha + K_\alpha = \frac{AK_\alpha}{A-4}$$

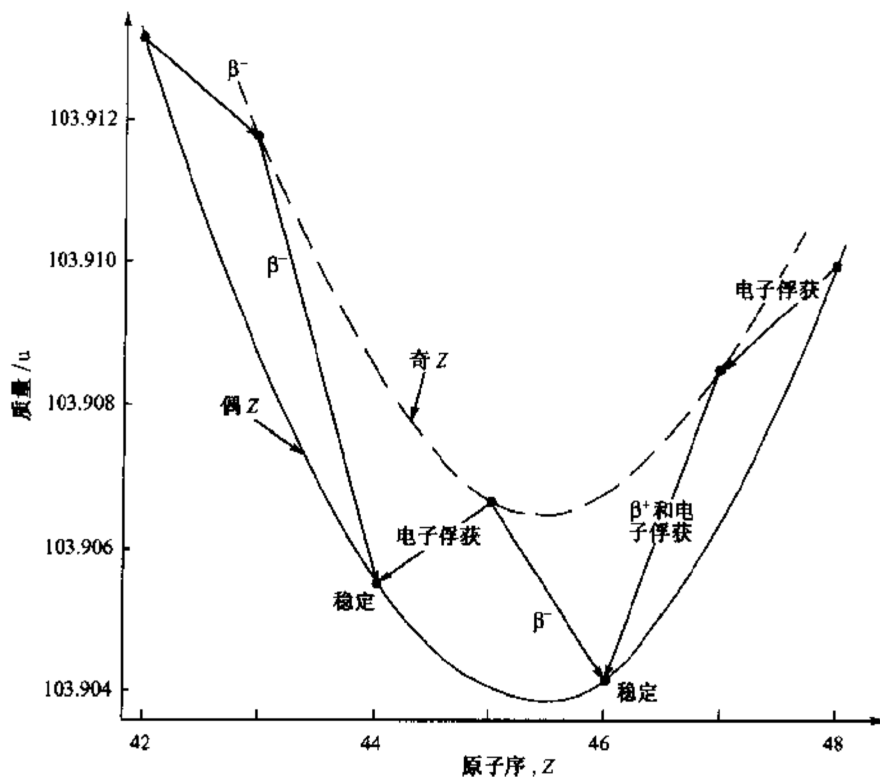


图 19-3

所以

$$K_\alpha = \left(\frac{A-4}{A}\right)Q$$

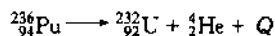
因为 Q 有精确值，所以 K_α 也是精确的；这样在两体衰变中 α 粒子是单能的．后代核的动能是

$$K_D = \frac{4}{A-4}\left(\frac{A-4}{A}Q\right) = \frac{4Q}{A}$$

注意 A 越大，K_α 越接近总的可利用能量 Q，并且 K_D 就越小．

19.16　说明 $^{236}_{94}Pu$ 是不稳定并且会 α 衰变．

解　☞ 对于 $^{236}_{94}Pu$ 自发 α 衰变



$$^{236}_{94}Pu \longrightarrow {}^{232}_{92}U + {}^{4}_{2}He + Q$$

即是说 Q 必须是正值．求解 Q 给出

$$\begin{aligned} Q &= (M_{Pu} - M_U - M_{He})c^2 \\ &= (236.046071\ u - 232.037168\ u - 4.002603\ u)(931.1\ MeV/u) \\ &= 5.87\ MeV \end{aligned}$$

于是 $^{236}_{94}Pu$ 事实上会自发 α 衰变．

19.17　一个不稳定的元素在核反应核中以常速率 R 产生．如果它的 β^- 衰变半衰期是 $T_{1/2}$．产生平衡量的 50% 所需的时间，以 $T_{1/2}$ 为单位，是多少？

解　☞ 我们有

$$元素的增加速率 = \frac{由反应堆产生的核子数}{s} - \frac{衰变的核子数}{s}$$

$$\frac{dN}{dt} = R - \lambda N \quad 或 \quad \frac{dN}{dt} + \lambda N = R$$

它的解是其齐次方程的解 $N_h = Ce^{-\lambda t}$，这里 C 是一个常数，和一个特解 $N_p = R/\lambda$ 之和，

$$N = N_h + N_\lambda = Ce^{-\lambda t} + \frac{R}{\lambda}$$

常数 C 由初始时核数是零的条件确定：

$$N(0) = 0 = C + \frac{R}{\lambda} \quad 或 \quad C = \frac{-R}{\lambda}$$

所以

$$N = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

平衡值是 $N(\infty) = R/\lambda$. 设 N 等于这个值的 $\frac{1}{2}$, 得出

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{\lambda}\right) = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}), \qquad e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda} = T_{1/2}$$

这个结果与 R 无关.

19.18　放射性物质 a(衰变常数 λ_a)衰变为放射性物质 b(衰变常数 λ_b). 求出在时间 t 之后物质 b 的总量.

解 ☞

$$b\text{ 核增加的速率} = \frac{\text{由 } a \text{ 产生的 } b \text{ 核的数目}}{\text{s}} - \frac{b\text{ 核衰变的数目}}{\text{s}}$$

因为每衰变一个 a 核就生成一个 b 核, 所以 b 核的生成速率是

$$-\frac{dN_a}{dt} = \lambda_a N_a$$

而

$$\frac{dN_b}{dt} = \lambda_a N_a - \lambda_b N_b = \lambda N_{a0} e^{-\lambda_a t} - \lambda_b N_b$$

$$\frac{dN_b}{dt} + \lambda_b N_b = \lambda_a N_{a0} e^{-\lambda_a t} \tag{1}$$

这是一个可用通常技巧求解的一阶微分方程. 齐次方程有解

$$(N_b)_h = Ce^{-\lambda_b t}$$

这里 C 是任意常数. 一个特解可尝试用 $(N_b)_p = De^{-\lambda_a t}$ 代进式(1)而得:

$$(-\lambda_a + \lambda_b) De^{-\lambda_a t} = \lambda_a N_{a0} e^{-\lambda_a t}$$

$$D = \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a}$$

于是完全解是

$$N_b = (N_b)_h + (N_b)_p = Ce^{-\lambda_b t} + \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a} e^{-\lambda_a t} \tag{2}$$

常数 C 由条件 $t = 0$ 时 $N_b = N_{b0}$ 确定,

$$N_{b0} = C + \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a}$$

最终给出

$$N_b = N_{b0} e^{-\lambda_b t} + \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a}(e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}) \tag{3}$$

19.19　如果假定在题 19.18 中 $N_{b0} = 0$, 找出使 N_b(后代核的数目)最大的时间 t.

解 ☞ 当 $N_{b0} = 0$, 我们有

$$N_b = \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a}(e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t})$$

从这里及极大值条件

$$\frac{dN_b}{dt} = \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a}(-\lambda_a e^{-\lambda_a t} + \lambda_b e^{-\lambda_b t}) = 0$$

对 t 求解得出

$$t = \frac{1}{\lambda_a - \lambda_b} \ln\left(\frac{\lambda_a}{\lambda_b}\right)$$

19.20　参照问题 19.18. 如果物质 b 衰变成稳定物质 c, 设 $N_{b0} = 0$, 确定 c 的数量如何随时间

变化.

解 ☞ 在任何时间核的总数总是 N_{a0},所以

$$
\begin{aligned}
N_c &= N_{a0} - N_a - N_b \\
&= N_{a0} - N_{a0}e^{-\lambda_a t} - \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a}(e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}) \\
&= N_{a0}\left(1 - \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a}e^{-\lambda_a t} + \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}e^{-\lambda_b t}\right)
\end{aligned}
$$

补充习题

注:对于某些问题,你可以用在附录中的原子质量

19.21 确定$^{232}_{92}U$在α,质子,中子,及氘衰变时的 Q 值.

答案:5.42 MeV; −6.09 MeV; −7.23 MeV; −10.59 MeV

19.22 设$^{232}_{92}U$核在静止情况下衰变,它在α衰变中放出的α粒子的动能是多少?

答案:5.33 MeV

19.23 $^{40}_{19}K$的衰变模式有:β^-衰变,β^+衰变,α衰变,电子俘获,中子发送.问那一种是可能的?

答案:β^-衰变,β^+衰变,电子俘获.

19.24 在氚(^3_1H)中放出的β^-粒子的最大动能是 19 keV.如果氚的质量是 3.0160504 u,衰变产物的质量是多少?

答案:3.016030 u

19.25 确定在$^{41}_{20}Ca$的电子俘获中发送出来的中微子的能量.

答案:0.41 MeV

19.26 元素 a($T_{1/2}$=2.1h)衰变成元素 b($T_{1/2}$=4.6h),它然后衰变成元素 c.如果元素 b 的初始总量是零.求出在 2h 时间后的 N_b/N_{a0}的数值.

答案:0.41

19.27 确定$^{90}_{38}Sr$($T_{1/2}$=28 年)的分解常数.

答案:0.0247 年$^{-1}$

19.28 如果$^{226}_{88}Ra$核在α衰变中的反冲能量可略去不计,问镭放出的α粒子的能量是多少?

答案:4.87 MeV

19.29 考虑到镭核的反冲能量,解题 19.28.

答案:4.78 MeV

19.30 ^6_2He核初始处于静止,求出在它β^-衰变后后代的最大可能速率.

答案:1.0×10^5 m/s

19.31 有活度 5 Ci 的样品$^{14}_6C$($T_{1/2}$=5570 年)的质量是多少?

答案:1.09 g

19.32 $^{230}_{92}U$的半衰期是 0.180×10^7 s,问 5×10^{-7} kg 的$^{230}_{92}U$的活度是多少?

答案:14.9 Ci

19.33 将$^{90}_{38}Sr$($T_{1/2}$=28 年)总量消耗 75% 需要多少时间?

答案:56 年

19.34 确定在衰变$^{144}_{60}Nd \longrightarrow ^{140}_{58}Ce - \alpha$中的α粒子和子代核的能量.

答案:1.85 MeV;0.53 MeV

19.35 在$^{243}_{95}Am$ α衰变中放出的α粒子有能量 5.3 MeV.假定α粒子在核内具有同样的动能,确定α粒子每秒钟与核壁的碰撞数.

答案:9.2×10^{20}碰撞/s

19.36 质量数为 A 的物质的α衰变中有两种α粒子,其能为 $K_{\alpha1}$及 $K_{\alpha2}$.证明相伴的γ射线的能量是 $E_\gamma=\frac{A}{A-4}(K_{\alpha1}-K_{\alpha2})$

19.37 在气泡室里的α粒子的最大传播距离,或界限 R(以 cm 为单位),与它的动能(以 MeV 为单位)满足经验方程 $R=0.318K^{3/2}$.在$^{219}_{86}Ru$的衰变中所发射的α粒子在气泡室中所测到的界限是 5.66 cm,

5.33 cm,和 5.18 cm,问它们的能量是多少?

答案;6.82 MeV;6.55 MeV;6.43 MeV

19.38 参照题 19.37.如果生成的子代核有一个基态及两个激发态,确定发出的 γ 射线的能量.

答案;0.28 MeV;0.40 MeV;0.12 MeV

第20章 核 反 应

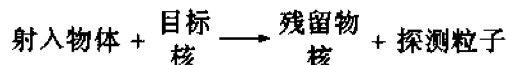
20.1 标记

现在所用的大量核数据来自对反应实验的分析，核被已知射入物体轰击，并且观察最终产物.原子序高到 $Z\approx80$ 的核同位素曾用作射入物体，但在本章中只考虑下述入射粒子：

粒子	记号
中子	n
质子	p, ${}^{1}_{1}H$
氘	d, ${}^{2}_{1}H$
氚	t, ${}^{3}_{1}H$
氦-3	h, ${}^{3}_{2}He$
氦-4(α 粒子)	α, ${}^{4}_{2}He$

一般反应结果为最终的残留核(通常不测定它)加上实验探测的另一个粒子.(有时，两个最终粒子都观察.)

核反应可表示成下述公式形式，



$$\text{射入物体} + \begin{matrix}\text{目标}\\\text{核}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\text{残留物}\\\text{核}\end{matrix} + \text{探测粒子}$$

或写成简化形式

目标(射入物体，探测粒子) 残留核

在任何核反应的公式中，总电荷(总 Z)和总核子数(总 A)左方的和右方的必须相等.

例如，在 1919 年由卢瑟福观察到的第一个核反应是

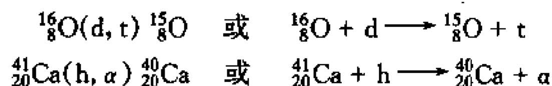


$${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O \quad \text{或} \quad {}^{14}_{7}N(\alpha, p)\,{}^{17}_{8}O$$

20.2 核反应的分类

反应可按照入射粒子，探测粒子，和残留核进行分类.如果射入物体和探测粒子相同，这时是散射反应.如果残留核留较低态或基态，散射是弹性的；如果残留核处于激发态，散射是非弹性的.

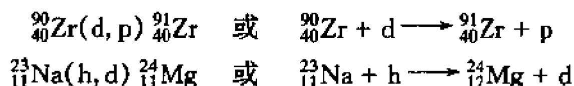
射入物体从目标处获得或损失核子分别称为增容或削裂反应，增容反应的两个例子是



$${}^{16}_{8}O(d, t)\,{}^{15}_{8}O \quad \text{或} \quad {}^{16}_{8}O + d \longrightarrow {}^{15}_{8}O + t$$

$${}^{41}_{20}Ca(h, \alpha)\,{}^{40}_{20}Ca \quad \text{或} \quad {}^{41}_{20}Ca + h \longrightarrow {}^{40}_{20}Ca + \alpha$$

而两个削裂反应是



$${}^{90}_{40}Zr(d, p)\,{}^{91}_{40}Zr \quad \text{或} \quad {}^{90}_{40}Zr + d \longrightarrow {}^{91}_{40}Zr + p$$

$${}^{23}_{11}Na(h, d)\,{}^{24}_{11}Mg \quad \text{或} \quad {}^{23}_{11}Na + h \longrightarrow {}^{24}_{12}Mg + d$$

增容或削裂反应经常在足够高的能量下观察到，可以认为这个反应是直接的.在直接的削裂或增容反应中，认为参与这个过程的核子添进或离开一定壳层模型的轨道而不扰动目标中的其它核子.

另一种类型的反应是入射物体和目标生成一个称为复合核的新核，它在激发态存在一个短时间然后衰变.典型复合核的寿命在 10^{-16}s 数量级.虽然 10^{-16}s 是太短了使得复合核不能直接观察，但它比射入粒子横过一个核距离的数量级为 10^{-21}s 的时间要长得多.因此认为复合核的衰变与它如何形成的无关；复合核不能"记住"它是如何形成的.

这里往往有几个不同的反应产生同样的复合核，而这个复合核也以几个不同的模式或通

道衰变. 例如, 复合核$^{20}_{10}Ne$处于一个激发态$[^{20}_{10}Ne]^*$, 我们有图 20-1 所示的各种反应.

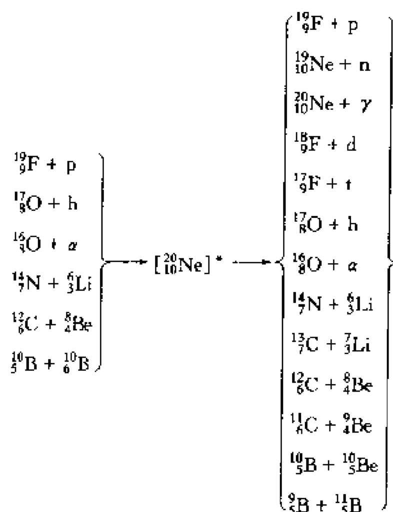


图 20-1

20.3 实验室系和质心系

核反应实验经常在所谓的质心系中分析. 这个系统相对于实验室系以常速运动使得碰撞粒子(和最终粒子)具有零总动量.

如果在实验室系中目标核是静止的, 质心系的速度 V_{cm}将沿着入射轰击粒子的方向. 于是相对于质心, 目标核的速度(V')和入射粒子的速度(v')分别为(用非相对论处理)

$$V' = V_{cm}, \qquad v' = v - V_{cm} \tag{20.1}$$

其方向如图 20-2(a)所示. 这里 v 是在实验室系测量的入射粒子的速度. 要求在质心系中目标核(质量 M_i)和入射粒子(质量 m_i)的动量之和为零, 我们从方程

$$\begin{aligned} -M_iV' + m_iv' &= 0 \\ -M_iV_{cm} + m_i(v - V_{cm}) &= 0 \\ (M_i + m_i)V_{cm} &= m_iv \end{aligned} \tag{20.2}$$

求出质量中心的速度, 而$(M_i + m_i)V_{cm}$是实验室系中质心的动量. 从式(20.1)和(20.2), 在反应发生前, 在质心系中, 目标核和入射粒子分别有速度

$$V' = \frac{m_i}{m_i + M_i}v, \qquad v' = \frac{M_i}{m_i + M_i}v \tag{20.3}$$

在反应后, 其最终粒子(如果这里只有两个). 在质心系中必须沿相反方向运动并且有相等的动量, 因为在质心系中初始总动量是零. [见图 20-2(b)]

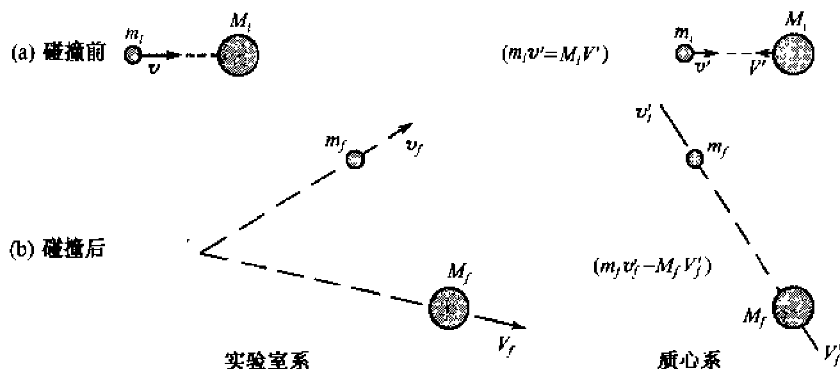


图 20-2

20.4 核反应的能量学说

在核反应中常常有能量的放出和吸收."放出能量"意味着反应后粒子的动能大于反应前粒子的动能,其增长的动能源于静止质量一部分转变为动能.释出的能量由核反应的 Q 值表示,它定义作终了动能与起始动能之差:

$$Q = K_f - K_i$$

因为总能量 $E = E_0 + K$ 是守恒的,我们还可以记

$$Q = E_{0i} - E_{0f}$$

换句话说,Q/c^2 是起始总静止质量和末了总静止质量之差;这个恰好就是在第 19 章对于特殊类衰变反应时给出的定义.

$Q>0$ 的反应,放出能量的反应,称为放热或者放能反应;这个反应甚至在两个初始粒子在静止的情况下也能发生.如果 $Q<0$,吸收能量或消耗能量,并且反应称为吸热的或吸能的;这样的反应只有在入射粒子超过某个动能阈时才能发生(见题 20.8).如果 $Q=0$ 并且如果反应前后的粒子是一样的,我们有弹性碰撞.

20.5 核截面

当目标材料由入射粒子轰击以产生核反应,但并不保证某入射物体一定会与目标核相作用而进入反应.截面 σ 是用来测定在目标材料范围内能产生核反应的概率的.其定义为

$$\sigma \equiv \frac{\text{每秒每个核子的反应数}}{\text{每秒每单位面积的射入物数}}$$

σ 值越大,发生指定反应的可能性就越大.截面有面积的量纲,并且通常采用靶(barn)为单位,

$$1\ \text{靶} = 10^{-28}\ \text{m}^2$$

所以 1 靶与核半径的平方同数量级.

如果在某物质中单位体积的目标核数是 n,而 N_0 个质点射进厚为 T 的这种物质后散射的质点数为 N_{sc},有(题 20.12)

$$N_{sc} = N_0(1 - e^{-n\sigma T})$$

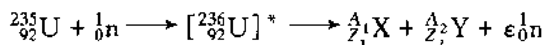
对于不同的反应截面不同,面对于给定的反应随射入粒子的能量起变化.如果反应是吸能的,则当能量低于阈值时截面为零.

20.6 核裂变

一个最常见的核反应是当一个 $A>230$ 的核吸收了一个入射中子之后形成一个复合核.很多这些复合核接着分裂为两个中等质量的核碎片和若干中子.这种类型的反应称为核裂变.

在一个核反应中,单位时间的裂变数由多余中子的吸收所控制,所以平均地说,每一个裂变的中子产生一个新的裂变.释放出来的热用来产生蒸气以推动涡轮和产生电能.如果反应不加控制,一个裂变的结果有多于一个的中子,它们引起进一步的裂变,裂变数会按几何级数式递增,其结果是源的能量在一个短时间内释放,产生核爆炸.

一个典型的裂变反应是



$${}^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \longrightarrow [{}^{236}_{92}\text{U}]^* \longrightarrow {}^{A_1}_{Z_1}\text{X} + {}^{A_2}_{Z_2}\text{Y} + \varepsilon\,{}^{1}_{0}\text{n}$$

这里 $Z_1 + Z_2 = 92$, $A_1 + A_2 + \varepsilon = 236$, ε 是一个整数.从实验中找到裂变碎片的质量比大约是 3/2.一个元素的裂变释放的中子数 ε 与所产生最终碎片有关.对于上面的反应,实验上找到在一个裂变中产生的平均中子数为 2.44,非整数的原因在于对所有反应产物求平均的结果.

这里两个衰变碎片通常具有的中子-质子比近似地等于原始核.于是在图 20-3 中,它们位于稳定曲线的上方,在这个范围里核属于中子富余并且要经历 β 衰变.通常它有一个 β 衰变链,每一次衰变降低 N/Z 比,一直衰变到一个稳定核为止(题 20.23).

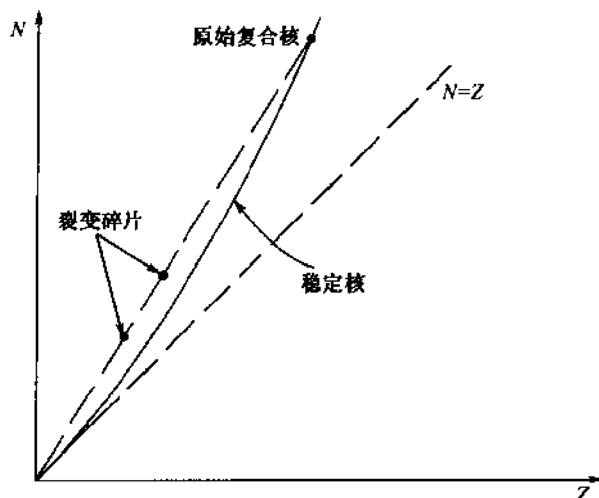


图 20-3

每一次裂变反应释放出 200 MeV 能量(题 20.24).这个比起典型的放能反应,其产物中只包含一个质量可与原始目标核相比的粒子的几个 MeV 要大得多.200MeV 的分配大致如下:

(a)170 MeV 是裂变碎片的动能

(b)5 MeV 是裂变中子的组合动能

(c)15 MeV 是 β^- 和 γ 射线能量

(d)10 MeV 是裂变碎片在 β^- 衰变时释放出来的中微子能量

在许多裂变反应中,用 $E\approx0.04$ eV 的热中子最容易形成复合核.从上面看到在一个典型的裂变之中释放出来的中子具有大约 2 MeV 的大动能.这些快中子怎样慢化到可供后面的裂变之用,它将在题 20.18 和 20.40 讨论.

20.7　核聚变

如同名称所示,聚变反应是两个核子或者相对轻($A<20$)的核聚合成较重的核,同时放出能量.聚变反应的一个例子是一个质子和一个中子聚合成一个氘核:



$$ {}^1_1\mathrm{H} + {}^1_0\mathrm{n} \longrightarrow {}^2_1\mathrm{H}, \qquad Q = 2.23\ \mathrm{MeV} $$

另一个聚变反应是两个氘聚合成一个 α 粒子



$$ {}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He}, \qquad Q = 23.8\ \mathrm{MeV} $$

虽然这些能量比起典型的聚变反应所释放出的能量($\approx$200 MeV)要小得多,但因为参与粒子的质量较小,单位质量所提供的能量较大.

聚变能的释放可以从图 18-1 得到了解,其中表示,对于轻核,单位核子的结合能一般随着质量数 A 的增加而递增.相应地,从两个较轻的核聚变而成的较重的核,其每个核子的结合能比起两个原始核来都要大.由于较高的结合能意味着较低的静止质量(18.1 节),而损失的静止质量表现为释放出的能量.

最有希望用在第一个聚变反应堆的反应是 D-D 反应



$$ {}^2_1\mathrm{H}(\mathrm{d},\mathrm{n})\,{}^3_2\mathrm{He}, \qquad Q = 3.27\ \mathrm{MeV} $$



$$ {}^2_1\mathrm{H}(\mathrm{d},\mathrm{p})\,{}^3_1\mathrm{H}, \qquad Q = 4.03\ \mathrm{MeV} $$

以及 D-T 反应



$$ {}^3_1\mathrm{H}(\mathrm{d},\mathrm{n})\,{}^4_2\mathrm{He}, \qquad Q = 17.59\ \mathrm{MeV} $$

反应序列如碳或伯特(Bethe)循环和质子-质子或 Crichfield 循环相信会发生在恒星中.这些循环的例子见题 20.27 到 20.29 以及题 20.41.

例题详解

20.1 4 MeV 的氘射向$^{6}_{3}$Li，观察到的一个反应是生成 2 个 α 粒子，每个有 13.2 MeV 的能量。求出这个反应中的 Q 值。

解 ☞ $Q=(K_{\alpha1}+K_{\alpha2})-K_d=(13.2\text{ MeV}+13.2\text{ MeV})-4\text{ MeV}=22.4\text{ MeV}$

20.2 确定下述核反应中的未知粒子：(a)$^{18}_{8}$O(d, p)X，(b)X(p, α)$^{87}_{39}$Y，(c)$^{122}_{52}$Te(X, d)$^{124}_{53}$I。

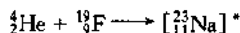
解 ☞ (a)在过程$^{18}_{8}$O(d,p)X 中，有一个中子加到$^{18}_{8}$O 上而形成 X，它是$^{19}_{8}$O。

(b)在过程 X(p, α)$^{87}_{39}$Y 中，有一个质子和两个中子从 X 中移去以生成$^{87}_{39}$Y，所以 X 是$^{90}_{40}$Zr。

(c)在过程$^{122}_{52}$Te(X, d)$^{124}_{53}$I 中，从$^{122}_{52}$Te 和 X 生成一个氘($^{2}_{1}$H)和$^{124}_{53}$I。于是 X 必须有两个质子，而总共是 4 个核子，因此是$^{4}_{2}$He。

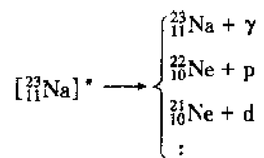
20.3 当 α 粒子射向$^{19}_{9}$F 时，确定复合核和某种可能反应产物。

解 ☞ 复合核有 $Z=Z_1+Z_2=2+9=11$ 和 $A=A_1+A_2=4+19=23$。于是我们有



$$^{4}_{2}\text{He}+{}^{19}_{9}\text{F}\longrightarrow[^{23}_{11}\text{Na}]^*$$

这个核可以衰变成多种产品，例如



$$[^{23}_{11}\text{Na}]^*\longrightarrow\begin{cases}^{23}_{11}\text{Na}+\gamma\\ ^{22}_{10}\text{Ne}+\text{p}\\ ^{21}_{10}\text{Ne}+\text{d}\\ \vdots\end{cases}$$

20.4 对于反应(a)$^{16}_{8}$O(γ, p)$^{15}_{7}$N，(b)$^{150}_{62}$Sm(p, α)$^{147}_{62}$Pm 计算其 Q 值。

解 ☞ 对于反应 $M_i(m_i, m_f)M_f$，Q-值是

$$Q=[M_i+m_i-(M_f+m_f)]c^2$$

(a)$Q=[15.994915\text{ u}+0\text{ u}-(15.000108\text{ u}+1.007825\text{ u})](931.5\text{ MeV/u})=-12.13\text{ MeV}$

(b)$Q=[149.917276\text{ u}+1.007825\text{ u}-(146.915108\text{ u}+4.002603\text{ u})](931.5\text{ MeV/u})=6.88\text{MeV}$

20.5 对于(a)$^{42}_{20}$Ca，(b)$^{130}_{52}$Te 计算其质量过剩(题 18.23)。

解 ☞ (a)$\delta=41.958\,625\text{ u}-42\text{ u}=-0.041375\text{ u}=-38.540\text{ MeV}$

(b)$\delta=129.906238\text{ u}-130\text{ u}=-0.093762\text{ u}=-87.337\text{ MeV}$

核数据中列出的通常是质量过剩而不是原子质量。

20.6 利用数据

核	质量过剩
$^{192}_{76}$Os	-0.038550 u
$^{191}_{76}$Os	-0.039030
d	$+0.014102$
t	$+0.016050$

求出反应$^{192}_{76}$Os(d, t)$^{191}_{76}$Os 的 Q 值

解 ☞ 因为在任何反应中总数 A 守恒，在计算 Q 时可用质量过剩来代替静止质量。于是

$$\begin{aligned}Q&=[M_i+m_i-(M_f+m_f)]c^2\\&=[-0.038550\text{ u}+0.014102\text{ u}-(-0.039030\text{ u}+0.016050\text{ u})](931.5\text{ MeV/u})\\&=-1.37\text{ MeV}\end{aligned}$$

20.7 在实验中观察到，一个 6 MeV 的质子射向一个静止的^{12}C 目标。取质子的质量为 1 u，求出质心系的速度。

解 ☞ 利用非相对论处理，质子的速度取决于关系 $K_i=\frac{1}{2}m_iv^2$：

$$v=\sqrt{\frac{2K_i}{m_i}}=c\sqrt{\frac{2K_i}{m_ic^2}}=(3\times10^8\mathrm{m/s})\sqrt{\frac{2(6\ \mathrm{MeV})}{(1\ \mathrm{u})(931.5\ \mathrm{MeV/u})}}$$
$$=3.41\times10^7\mathrm{m/s}$$

由式(20.2)

$$V_{\mathrm{cm}}=\frac{m_i}{M_i+m_i}v=\frac{1\ \mathrm{u}}{12\ \mathrm{u}+1\ \mathrm{u}}(3.41\times10^7\ \mathrm{m/s})$$
$$=2.62\times10^6\ \mathrm{m/s}$$

沿质子运动方向.

20.8　对于吸热反应 $M_i(m_i,m_f)M_f$,利用非相对论处理,确定 Q 值与入射粒子的阈能有什么关系.

解　☞ 求出所要的答案的最简便的方式是先在质心系中计算,这时总动量是零,然后将这个结果转换到实验室系.利用图 20-2 的记号,在质心系中总的初始动能是

$$K_{i\mathrm{cm}}=\frac{1}{2}m_iv'^2+\frac{1}{2}M_iV'^2$$

由式(20.3)变换到实验室系,注意目标粒子在实验室系是静止的,

$$K_{i\mathrm{cm}}=\frac{1}{2}m_i\left(\frac{M_i}{m_i+M_i}v\right)^2+\frac{1}{2}M_i\left(\frac{m_i}{m_i+M_i}v\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}m_iv^2\right)\left[\frac{M_i(M_i+m_i)}{(M_i+m_i)^2}\right]=K_{i\mathrm{lab}}\left(\frac{M_i}{m_i+M_i}\right)\tag{1}$$

(1)是在实验室系和质心系测定的初始动能的一般性关系.

反应的 Q 值只依赖于静止质量,它在这两个系统中的数值相同:

$$K_{f\mathrm{lab}}-K_{i\mathrm{lab}}=K_{f\mathrm{cm}}-K_{i\mathrm{cm}}=Q\tag{2}$$

在质心系中的阈能 $K_{\mathrm{th\ cm}}$是能够生成两个静止粒子($K_{f\mathrm{cm}}=0$)的初始动能,所以

$$K_{\mathrm{th\ cm}}=-Q\tag{3}$$

在实验室系中的相应能量从(1)得到,

$$K_{\mathrm{th\ lab}}=-Q\left(\frac{M_i+m_i}{M_i}\right)\tag{4}$$

当入射粒子具有阈能时,考虑(在实验室系的)质心的动能 K^*,可以得到 $K_{\mathrm{th\ lab}}$的一个更直接的表达式.利用式(20.2)和(4),我们有

$$K^*=\frac{1}{2}(M_i+m_i)V_{\mathrm{cm\ th}}^2=\frac{m_i}{M_i+m_i}\left(\frac{1}{2}m_i\cdot v_{\mathrm{th}}^2\right)$$
$$=\frac{m_i}{M_i+m_i}K_{\mathrm{th\ lab}}=\left(1-\frac{M_i}{M_i+m_i}\right)K_{\mathrm{th\ lab}}$$
$$=K_{\mathrm{th\ lab}}+Q$$

或

$$K_{\mathrm{th\ lab}}=-Q+K^*\tag{5}$$

方程(5)表示入射粒子必须有足够的能量去启动吸能($-Q$)反应和考虑到整体的系统运动(K^*,它在反应中不变).

20.9　求出从一个质子角度上看来相对于$^{16}_{8}$O,$^{93}_{41}$Nb 和$^{209}_{83}$Bi 的库仑位垒.

解　☞ 库仑位垒是把一个质子移到核边缘所需要的能量(图 20-4),如果我们定义 $\Delta\equiv R+r=r_0(A^{1/3}+1)$,于是

$$E_C=k\frac{(Ze)e}{\Delta}=k\frac{Ze^2}{r_0(A^{1/3}+1)}$$
$$=\left(\frac{1.44\ \mathrm{MeV\cdot fm}}{1.4\ \mathrm{fm}}\right)\left(\frac{Z}{A^{1/3}+1}\right)$$
$$=(1.03\ \mathrm{MeV})\left(\frac{Z}{A^{1/3}+1}\right)$$

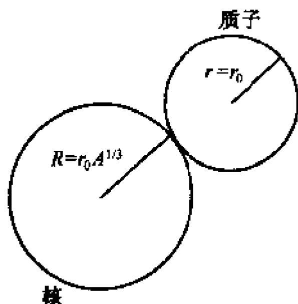


图 20-4

对于$^{16}_{8}O$,

$$E_C = (1.03\ \text{MeV})\left(\frac{8}{16^{1/3}+1}\right) = 2.34\ \text{MeV}$$

对于$^{93}_{41}Nb$,

$$E_C = (1.03\ \text{MeV})\left(\frac{41}{93^{1/3}+1}\right) = 7.64\ \text{MeV}$$

对于$^{209}_{83}Bi$,

$$E_C = (1.03\ \text{MeV})\left(\frac{83}{209^{1/3}+1}\right) = 12.33\ \text{MeV}$$

20.10 参照题20.9,将库仑位垒与反应的阈能相比较.

解 ☞ $^{16}_{8}O(p,d)^{15}_{8}O$ $^{93}_{41}Nb(p,d)^{92}_{41}Nb$ $^{209}_{83}Bi(p,d)^{208}_{83}Bi$

一个反应的 Q 值是

$$Q = (M_i + m_i - M_f - m_f)c^2$$

而对于题20.8的(4)

$$K_{th} = -Q\left(\frac{M_i + m_i}{M_i}\right)$$

对于$^{16}_{8}O(p,d)^{15}_{8}O$:

$$Q = (15.994\,915\ \text{u} + 1.007\,825\ \text{u} - 15.003\,070\ \text{u} - 2.014\,102\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = -13.44\ \text{MeV}$$

$$K_{th} = (13.44\ \text{MeV})\left(\frac{16\ \text{u}+1\ \text{u}}{16\ \text{u}}\right) = 14.28\ \text{MeV}$$

对于$^{93}_{41}Nb(p,d)^{92}_{41}Nb$:

$$Q = (92.906\,382\ \text{u} + 1.007\,825\ \text{u} - 91.907\,211\ \text{u} - 2.014\,102\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = -6.62\ \text{MeV}$$

$$K_{th} = (6.62\ \text{MeV})\left(\frac{93\ \text{u}+1\ \text{u}}{93\ \text{u}}\right) = 6.69\ \text{MeV}$$

对于$^{209}_{83}Bi(p,d)^{208}_{83}Bi$:

$$Q = (208.980\,394\ \text{u} + 1.007\,825\ \text{u} - 207.979\,731\ \text{u} - 2.014\,102\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = -5.23\ \text{MeV}$$

$$K_{th} = (5.23\ \text{MeV})\left(\frac{209\ \text{u}+1\ \text{u}}{209\ \text{u}}\right) = 5.26\ \text{MeV}$$

对于$^{16}_{8}O(p,d)^{15}_{8}O$, $K_{th} \gg E_C$ 而在阈能下反应有大的概率.对于$^{209}_{83}Bi(p,d)^{208}_{83}Bi$, $K_{th} \ll E_C$,在阈能下这个反应难以发生,因为质子很难靠近$^{209}_{83}Bi$核.在$^{93}_{41}Nb(p,d)^{92}_{41}Nb$反应中,阈能(6.69 MeV)略微小于库仑位垒(7.61 MeV),所以可能是没有反应,因为质子刚好不能到达$^{93}_{41}Nb$核.但事实上在阈能时观察到了反应$^{93}_{41}Nb(p,d)^{92}_{41}Nb$.这是穿透库仑位垒的例子,这里质子即使低于库仑位垒也能够到达$^{93}_{41}Nb$核.

20.11 在厚度为 dT 的薄目标靶中,该靶单位体积有几个散射中心,每个中心的截面为 σ,求出由散射中心遮盖的面积和目标的总面积之比.

解 ☞ 在一个薄目标中,没有核可遮挡另一个核,从而

$$R = \frac{\text{散射中心的总面积}}{\text{目标的面积}} = \frac{\text{目标的体积} \times n \times \sigma}{\text{目标的面积}}$$

$$= \frac{(A\,dT) \times n \times \sigma}{A} = n\sigma dT$$

20.12 截面积为 A 的粒子束,共有 N_0 个粒子,当它穿过厚度为 T 的目标材料,在它的单位体积中有 n 个散射中心,每个中心的截面为 σ,之后,求出由粒子束散射的光子数.

解 ☞ 考虑厚度为 dT 的目标材料的薄膜.在任何时间只要一个入射粒子碰到薄膜的一个散射中心,入射粒子就被散射.于是,散射粒子数与射向薄膜的粒子数 N 之比等于散射中心的总面积与束流面积之比,所以从题20.11,我们有

$$\frac{\text{散射粒子数}}{\text{入射粒子数}} = \frac{\text{散射中心的总面积}}{\text{目标靶的面积}}$$

或者

$$\frac{dN_{sc}}{N} = -\frac{dN}{N} = n\sigma dT$$

(用负号是因为散射粒子的增加 dN_{sc} 相应于入射粒子的减小 $-dN$.)将这个表达式积分,我们有

$$-\int_{N_0}^{N_f}\frac{dN}{N}=\int_0^T n\sigma dT \quad 或 \quad -\ln\frac{N_f}{N_0}=n\sigma T \quad 或 \quad N_f=N_0e^{-n\sigma T}$$

N_0 和 N_f 是束中的初始和终了的粒子数. 于是散射粒子数为

$$N_{sc}=N_0-N_f=N_0(1-e^{-n\sigma T})$$

20.13 设有一个目标靶,中子束射过它之后有 0.001% 被散射. 如果该靶标有密度 $1.06\times10^4 kg/m^3$, $A=200$, 而每个核子的中子截面 σ 是 1.1 靶,求出靶标厚度.

解 ☞ 单位体积散射中心总数是

$$n=\left(\frac{6.02\times10^{26}\text{ 核数 /kmol}}{200\text{kg/kmol}}\right)(1.06\times10^4\text{kg/m}^3)=3.19\times10^{28}\text{ 核数 /m}^3$$

并且

$$n\sigma=(3.19\times10^{28}\text{ m}^{-3})(1.1\times10^{-28}\text{ m}^2)=3.51\text{ m}^{-1}$$

从题 20.12, 散射粒子数

$$N_{sc}=N_0(1-e^{-n\sigma T})$$

而 $N_{sc}/N_0=10^{-5}$, 我们有

$$10^{-5}=1-e^{(3.51\text{ m}^{-1})T} \quad 或 \quad e^{-(3.51\text{ m}^{-1})T}=1-10^{-5}$$

对于小 x, $e^{-x}\approx1-x$, 因此有

$$(3.51\text{ m}^{-1})T=10^{-5} \quad 或 \quad T=\frac{10^{-5}}{3.51\text{ m}^{-1}}=2.85\times10^{-6}\text{ m}$$

20.14 从 $^{210}_{84}Po$ 源产生的 5.30 MeV α 粒子射向 ^9_4Be 目标靶,发现产生了一种不带电的但是为另一个品种的未知辐射. 假定未知辐射是 γ 射线. 计算 γ 射线沿入射方向射出时的能量. [这个题与题 20.15 和 20.16 在一起以实例说明使得查德威克在 1932 年发现中子的起因.]

解 ☞ 假定反应是 $^9_4Be(\alpha,\gamma)^{13}_6C$. 取 ^9_4Be 核静止而 α 粒子的动能是 5.30 MeV, 从质量-能量守恒有

$$(M_{Be}+M_\alpha)c^2+K_\alpha=M_Cc^2+K_C+K_\gamma$$

$$(9.012186\text{ u}+4.002603\text{ u})(931.5\text{ MeV/u})+5.30\text{ MeV}=(13.003354\text{ u})(931.5\text{ MeV/u})+K_C+K_\gamma$$

$$K_\gamma+K_C=16.0\text{ MeV} \tag{1}$$

这里 γ 射线和 $^{13}_6C$ 核在同样的方向上移动,从动量守恒有

$$p_\alpha=p_\gamma+p_C \quad 或 \quad p_\alpha c=p_\gamma c+p_C c \tag{2}$$

对于实物粒子在非相对论处理中有

$$K=\frac{p^2}{2M}=\frac{(pc)^2}{2Mc^2} \quad 或 \quad pc=\sqrt{2(Mc^2)K}$$

于是

$$p_\alpha c=\sqrt{2(4\text{ u}\times931.5\text{ MeV/u})(5.30\text{ MeV})}=199\text{ MeV}$$

$$p_C c=\sqrt{2(13\text{ u}\times931.5\text{ MeV/u})K_C}=156(\text{MeV})^{1/2}K_C^{1/2}$$

而对于 γ 射线光子, $E_\gamma=K_\gamma=p_\gamma c$. 代进式(2):

$$199\text{ MeV}=K_\gamma+156(\text{MeV})^{1/2}K_C^{1/2} \tag{3}$$

解联立的式(1)和(3),我们得到

$$K_\gamma=14.6\text{ MeV}, \qquad K_C=1.4\text{ MeV}$$

20.15 在另一个实验中,题 20.14 中的未知辐射投向一个富质子石蜡目标和一个 $^{14}_7N$ 目标上. 仍旧假定这个辐射是光子,确定能产生 5.7 MeV 反冲质子和 1.4 MeV 的反冲 $^{14}_7N$ 核的最小光子能量,并且将这些能量与题 20.14 的结果相比较.

解 ☞ 光子将以康普顿散射的形式与目标核相互作用. 最小的 E_γ 对应于迎头正碰撞. 分析这些碰撞可以用非相对论的有关粒子的表达式,因为观察到的动能比目标粒子的静能小得多. 于是(带撇的是指碰撞后的量),

$$h\nu_{min}=h\nu'+K' \quad (能量守恒)$$

并且,因为全部动量沿着 x 轴,

$$\frac{h\nu_{\min}}{c}=\frac{h\nu'}{c}+m_0v'\text{(动量守恒)}$$

将第二个方程乘以 c 并且与第一个方程相加,利用 $m_0v'=\sqrt{2m_0K'}$,我们得到

$$2h\nu_{\min}=\sqrt{2m_0c^2K'}+K'=\sqrt{K'}\left(\sqrt{2m_0c^2}+\sqrt{K'}\right)$$

因为 $2m_0c^2\gg K'$,我们可以略去括弧中的 $\sqrt{K'}$ 而得到

$$h\nu_{\min}=\sqrt{\frac{K'(m_0c^2)}{2}}$$

对于质子目标靶

$$h\nu_{\min}\approx\sqrt{(5.7\ \text{MeV})(938\ \text{MeV})/2}=52\ \text{MeV}$$

对于$^{14}_{7}$N 目标靶

$$h\nu_{\min}\approx\sqrt{(1.4\ \text{MeV})(14\ \text{u}\times 931.5\ \text{MeV/u})/2}=96\ \text{MeV}$$

这两个能量都远远超出题 20.14 的 $K_\gamma=14.6$ MeV,说明未知辐射是 γ 射线的假设与所观察到的数据不一致.

20.16 设题 20.15 中的反冲质子和$^{14}_{7}$N 核是与一个有质量入射粒子迎头正撞的结果,求出它的质量和初始动能.

解 ☞ 利用附标 1 和 2 来区分入射粒子和目标粒子,我们有

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2\quad\text{(非相对论能量守恒)}$$

$$m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2'\quad\text{(动量守恒)}$$

速度 v_1' 在实验中并不测量.从第二个方程中解出 v_1' 并且代入第一个方程中,我们得到关系

$$v_2'=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}$$

粒子 2 的最终动能是

$$K_2'=\frac{1}{2}m_2v_2'^2=\frac{1}{2}m_2\left[\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}\right]^2=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}K_1$$

代进目标粒子质量和所观察到的能量,我们得到关于量 m_1 和 K_1 的两个方程:

$$\text{质子目标:}\quad 5.7\ \text{MeV}=\frac{4m_1(1\ \text{u})}{(m_1+1\ \text{u})^2}K_1$$

$$^{14}_{7}\text{N 目标:}\quad 1.4\ \text{MeV}=\frac{4m_1(14\ \text{u})}{(m_1+14\ \text{u})^2}K_1$$

解出

$$m_1=0.98\ \text{u},\quad K_1=5.7\ \text{MeV}$$

数值 $m_1\approx 1$ u 与我们所知的中子质量符合得相当好.又,如果在题 20.14 中将反应$^{9}_{4}$Be$(\alpha,\gamma)^{13}_{6}$C 更改为$^{9}_{4}$Be$(\alpha,n)^{12}_{6}$C,可以求出中子的动能近似等于上述的数值 5.7 MeV(见题 20.35).

20.17 300 K 热中子的动能是多少?

解 ☞ 粒子的动能是 kT 量级,k 是玻尔兹曼常数.于是

$$K_n\approx(8.617\times10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K})=0.026\ \text{eV}$$

20.18 平均地说,中子与准自由质子一次碰撞要损失一半能量(见题 20.40 关于迎头碰撞效应).问使 2 MeV 中子变为热能为 0.04 eV 的中子,平均地需要多少次碰撞?

解 ☞ 设 N 为碰撞数,终了和初始能量之比是

$$\frac{K_f}{K_i}=\frac{0.04\ \text{eV}}{2\times10^6\ \text{eV}}=(0.5)^N\quad\text{或}\quad(0.5)^N=2\times10^{-8}$$

上式双方取对数

$$(-0.301)N=-7.70\quad\text{或}\quad N\approx 26$$

在核裂变中产生的中子的能量平均值约为 2 MeV,需要平均对质子进行 26 次碰撞使其能量降为热能水平.热中子为产生进一步的核裂变提供大的概率.

20.19 $^{235}_{92}U$ 由 6 MeV 的 γ 射线而分裂为$^{90}_{36}Kr$, $^{142}_{56}Ba$ 和 3 个中子, 求出这个光裂变产物的总的最终动能.

解 ☞ 裂变反应是



$$^{235}_{92}U+\gamma\longrightarrow {}^{90}_{36}Kr+{}^{142}_{56}Ba+3\,{}^{1}_{0}n$$

由质量-能量守恒

$$M_U c^2+K_\gamma=(M_{Kr}+M_{Ba}+3m_n)c^2+K_f$$

或

$$K_f=[235.043915\ u-(89.91972\ u+141.91635\ u+3\times1.008665\ u)](931.5\ MeV/u)+6\ MeV$$
$$=175.4\ MeV$$

20.20 在由中子引起的$^{235}_{92}U$ 的裂变中放出大约 185 MeV 的可用能量. 如果在反应堆中的$^{235}_{92}U$连续生成 100 MW 的功率, 1 kg 的铀将能使用多少时间?

解 ☞ 对于所指定功率输出对应的裂变速率是

$$\left(10^8\ \frac{J}{s}\right)\left(\frac{10^{-6}\ MeV}{1.6\times10^{-19}\ J}\right)\left(\frac{1\ 裂变}{185\ MeV}\right)=3.38\times10^{18}\ \frac{裂变}{s}$$

1 kg ^{235}U 包含

$$\left(\frac{1\ kg}{235\ kg/kmol}\right)\left(6.023\times10^{26}\ \frac{核}{kmol}\right)=2.56\times10^{24}\ 核$$

所以最终求得时间

$$t=\frac{2.56\times10^{24}}{3.38\times10^{18}s^{-1}}=7.58\times10^5\ s\doteq8.78\ 天$$

20.21 估计在氘等离子体(负电电子和正电氘核的中性混合物)中产生聚变所需要的温度.

解 ☞ 取核力所及的范围为 2 fm, 在这个距离上两个氘核的推斥能为

$$E_C=\frac{ke^2}{R}=\frac{1.44\ MeV\cdot fm}{2\ fm}=0.72\ MeV$$

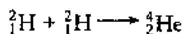
温度 T 下的粒子系统的平均动能为 kT 数量级, 有

$$E_C\doteq kT$$
$$0.72\ MeV=(8.617\times10^{-11}\ MeV/K)T$$
$$T=8.35\times10^9 K$$

考虑到位垒穿透的一个较细致的分析指出聚变在大概 10^7K 温度时开始.

20.22 两个氘核聚变成一个 α 粒子时放出多少能量?

解 ☞ 这个反应是



$$^{2}_{1}H+{}^{2}_{1}H\longrightarrow{}^{4}_{2}He$$

质量-能量守恒给出

$$2M_Hc^2=M_{He}c^2+Q$$
$$Q=(2M_H-M_{He})c^2$$
$$=(2\times2.014102\ u-4.002613\ u)(931.5\ MeV/u)=23.80\ MeV$$

在题 20.21 中知道开始聚变过程需要大约 0.7 MeV 的能量, 而发生聚变之后放出 23.8 MeV 能量.

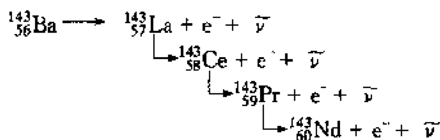
20.23 在一系过程中, $^{235}_{92}U$ 加一个中子形成复合核$[^{236}_{92}U]^*$然后裂变; 以后裂变产生进一步的衰变. 如果初始裂变碎片是$^{143}_{56}Ba$ 和$^{90}_{36}Kr$, 写出到达最后稳定核的演变过程.

解 ☞ 初始过程是



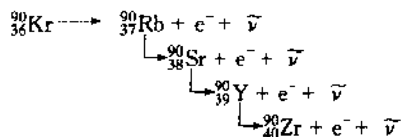
$$^{235}_{92}U+{}^{1}_{0}n\longrightarrow[^{236}_{92}U]^*\longrightarrow{}^{143}_{56}Ba+{}^{90}_{36}Kr+3\,{}^{1}_{0}n$$

$^{143}_{56}Ba$ 然后开始了一系 β 衰变



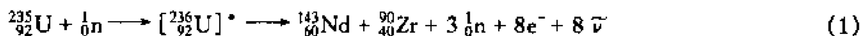
$$^{143}_{56}Ba\longrightarrow{}^{143}_{57}La+e^-+\bar\nu$$
$$\hookrightarrow{}^{143}_{58}Ce+e^-+\bar\nu$$
$$\hookrightarrow{}^{143}_{59}Pr+e^-+\bar\nu$$
$$\hookrightarrow{}^{143}_{60}Nd+e^-+\bar\nu$$

$^{143}_{60}Nd$ 核是稳定的. $^{90}_{36}Kr$ 开始 β 衰变



核 $^{90}_{40}Zr$ 是稳定的.

于是总的反应过程看来是



$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow [^{236}_{92}U]^{*} \longrightarrow ^{143}_{60}Nd + ^{90}_{40}Zr + 3\,^{1}_{0}n + 8e^{-} + 8\,\tilde{\nu} \qquad (1)$$

20.24 计算在题20.23的裂变反应中所释放出的能量.

解 ☞ 如果原子静止质量数据用来计算题20.23中的式(1),则已经将 $8e^{-}$ 项剔除.于是

$$Q = [M_U - M_{Nd} - M_{Zr} - (3-1)m_n]c^2$$
$$= [235.043\,915\text{ u} - 142.909\,779\text{ u} - 89.904\,770\text{ u} - 2(1.008\,665\text{ u})](935.1\text{ MeV/u})$$
$$= 197.6\text{ MeV}$$

20.25 估计在题中的 $^{143}_{56}Ba$ 和 $^{90}_{36}Kr$ 核在它们刚形成之后的库仑推斥能.

解 ☞ 在刚形成之后,假定两个核是球形的并且互相接触.于是库仑能是

$$E_C = k\frac{(Z_1e)(Z_2e)}{R_1+R_2} = \frac{ke^2Z_1Z_2}{r_0(A_1^{1/3}+A_2^{1/3})}$$
$$= \frac{(1.44\text{ MeV}\cdot\text{fm})(56)(36)}{(1.4\text{ fm})(143^{1/3}+90^{1/3})} = 214\text{ MeV}$$

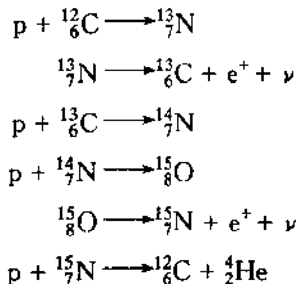
它与题20.24中给出的反应中放出的能量相近.

20.26 对于D-T聚变反应,计算在生成1 MW功率时氘、氚的消耗速率.

解 ☞ 在D-T反应中, $^{3}_{1}H(d,n)^{4}_{2}He$. 在每一个聚变中放出的能量是 $Q = 17.6$ MeV(题20.37),反应必须的速率是

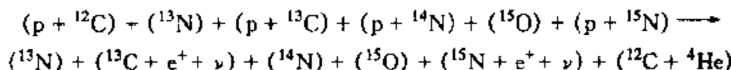
$$R = \left(1\times10^{6}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\text{ eV}}{1.6\times10^{-19}\text{J}}\right)\left(\frac{1\text{ 反应}}{17.6\times10^{6}\text{eV}}\right)$$
$$= 3.55\times10^{17}\,\frac{\text{反应}}{\text{s}}$$

20.27 计算在下述碳(Bethe)循环中释放出的能量:



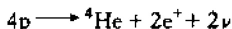
$$p + ^{12}_{6}C \longrightarrow ^{13}_{7}N$$
$$^{13}_{7}N \longrightarrow ^{13}_{6}C + e^{+} + \nu$$
$$p + ^{13}_{6}C \longrightarrow ^{14}_{7}N$$
$$p + ^{14}_{7}N \longrightarrow ^{15}_{8}O$$
$$^{15}_{8}O \longrightarrow ^{15}_{7}N + e^{+} + \nu$$
$$p + ^{15}_{7}N \longrightarrow ^{12}_{6}C + ^{4}_{2}He$$

解 ☞ 代替在每一个反应中寻找能量放出,我们可以将所有的反应加在一起,有



$$(p + ^{12}C) + (^{13}N) + (p + ^{13}C) + (p + ^{14}N) + (^{15}O) + (p + ^{15}N) \longrightarrow$$
$$(^{13}N) + (^{13}C + e^{+} + \nu) + (^{14}N) + (^{15}O) + (^{15}N + e^{+} + \nu) + (^{12}C + ^{4}He)$$

在将两方共同的项消去之后,剩下的是



$$4p \longrightarrow ^{4}He + 2e^{+} + 2\nu$$

于是全部的反应等价于四个质子聚合成一个氦核.应用质量-能量守恒,我们有

$$4(M_H - m_e)c^2 = (M_{He} - 2m_e)c^2 + 2m_ec^2 + Q$$
$$Q = (4M_H - M_{He} - 4m_e)c^2$$
$$= [4(1.007\,825\text{ u}) - 4.002\,603\text{ u} - 4(0.000\,549\text{ u})](931.5\text{ MeV/u})$$
$$= 24.69\text{ MeV}$$

从这里看到碳原子是一种催化剂,因为它在碳循环结束时重新产生.

20.28 求出消耗在题20.27循环中1千克氢所放出的能量.

解 ☞ 从等价循环 $4p \longrightarrow {}^4He + 2e^- + 2\nu$ 看到每消耗 4 个质子放出 24.69 MeV 能量，所以我们有

$$\frac{24.69\ \text{MeV}}{4\ 质子} \times \frac{1\ 质子}{1.673 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 3.69 \times 10^{27}\ \frac{\text{MeV}}{\text{kg}}$$

或

$$5.90 \times 10^{14}\ \text{J/kg}$$

20.29　参照题 20.28，在碳循环中大约放出 4×10^{26} W 功率．算出氢原子消耗的速率．

解 ☞

$$\left(4 \times 10^{26}\ \frac{\text{J}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\ \text{kg}\ 氢}{5.90 \times 10^{14}\text{J}}\right) = 6.8 \times 10^{11}\text{kg/s(氢)}$$

作为对照，太阳的质量大概为 2×10^{30} kg.

补充习题

注：对于某些题，可以利用附录中给出的原子质量．

20.30　确定核反应(a) ${}^{182}_{74}W({}^3_2He, n)X$，(b) ${}^{42}_{20}Ca({}^6_3Li, X){}^{45}_{21}Sc$ 中的未知粒子．

答案：(a) ${}^{184}_{76}Os$；(b) ${}^3_2He$

20.31　求出在反应 ${}^{41}_{20}Ca + p \longrightarrow [{}^{42}_{21}Sc]^* \longrightarrow {}^{40}_{20}Ca + d$ 中 $[{}^{42}_{21}Sc]^*$ 的速度，设在实验室中质子的能量是 7.2 MeV.

答案：8.9×10^5 m/s

20.32　计算反应 ${}^{42}_{20}Ca(p, d){}^{41}_{20}Ca$ 中的 Q 值．

答案：-9.25 MeV

20.33　求出(a) ${}^4_2He$ 和(b) ${}^{88}_{38}Sr$ 中质量过剩，以 u 为单位．

答案：(a) 0.002603 u；(b) -0.094359 u

20.34　对于某种散射目标，入射中子束有 10^{-8} 份被散射．如果目标物质的密度是 4.1×10^3 kg/m^3，$A = 30$，而目标的厚度为 10^{-8} m，求出对中子的总截面．

答案：0.122 靶

20.35　设在题 20.14 中，其反应是 ${}^9_4Be(\alpha, n){}^{12}_6C$，计算中子的动能并且将它与题 20.16 中求得的值比较．

答案：5.7 MeV

20.36　证明在质心系中两体弹性碰撞后每一个粒子的速率不变．

20.37　对于 D-T 聚变反应 ${}^3_1H(d, n){}^4_2He$，计算它的 Q 值．

答案：17.6 MeV

20.38　求出 D-D 反应：(a) ${}^2_1H(d, n){}^3_2He$，(b) ${}^2_1H(d, p){}^3_1H$，中的 Q 值．

答案：(a) 3.27 MeV；(b) 4.03 MeV

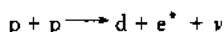
20.39　参照题 20.20．如果 ${}^{235}_{92}U$ 反应堆 30 天内用去了 2 kg 燃料，它的功率输出是多少？

答案：62.5 MW

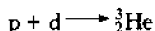
20.40　利用题 20.16 的结果，当 2 MeV 中子与一个静止的准自由质子迎头碰撞后的动能是多少？

答案：0.347 eV

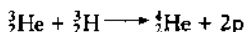
20.41　证明下面的质子-质子 Critchfield 循环：



$$p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu$$



$$p + d \longrightarrow {}^3_2He$$



$${}^3_2He + {}^3_2H \longrightarrow {}^4_2He + 2p$$

与题 20.27 中的碳循环的等价性．

20.42　计算在聚变 ${}^4_2He + {}^4_2He - {}^4_2He \longrightarrow {}^{12}_6C$ 中放出的能量．

答案：7.27 MeV

20.43　考虑类似于题 20.27 反应序列，但是用 p 和 ${}^{14}N$ 作为原始反应物．如所形成的中间核是 ${}^{15}_8O$，${}^{15}_7N$，${}^{16}_8O$，${}^{17}_9F$ 和 ${}^{17}_8O$，写出重新生出 ${}^{14}_7N$ 的反应结果，并且给出全部反应．

答案：$4p \longrightarrow {}^4_2He + 2e^+ + 2\nu$(全部)

第 21 章　粒子物理

21.1　粒子谱系

实验上已经探测到 30 多个长寿命粒子和反粒子．反粒子与对应的粒子具有相同的质量和自旋，但是电磁性质，例如电荷和磁矩，在粒子和反粒子中是相反的．长寿命粒子列在表 21-1 之中，其中也给出有关的一些性质．在这些粒子之外，几百种共振态也已经找到．如果共振粒子也加到这个目录中去，它将长达几页．与表 21-1 的相对稳定的粒子(平均寿命 $T_m \gg 10^{-21}$s)相对照，共振态寿命很短，$T_m < 10^{-21}$s．在表 21-1 中记载的粒子可分为四族—玻色子，轻子，介子和重子．介子和重子一起称为强子．这个分类主要是按照表 21-2 的格式以粒子的自旋，质量和相互作用类型来分类的．

表 21-1

	粒子(反粒子)	质量 (MeV/c^2)	平均寿命 (s)	电荷数 ($\mathscr{Q}$)	自旋 (S)	轻子数 (l_e)	轻子数 (l_μ)	轻子数 (l_τ)	重子数 ($\mathscr{B}$)	奇异性 ($\mathscr{S}$)
无质量玻色子	$\gamma(\gamma)$	0	稳定	0	1					
轻子	$\nu_e(\bar\nu_e)$	~0	稳定	0(0)	$\frac{1}{2}$	1(-1)				
	$\nu_\mu(\bar\nu_\mu)$	~0	稳定	0(0)	$\frac{1}{2}$		1(-1)			
	$\nu_\tau(\bar\nu_\tau)$	~0	稳定	0(0)	$\frac{1}{2}$			1(-1)		
	$e^-(e^+)$	0.511	稳定	-1(+1)	$\frac{1}{2}$	1(-1)				
	$\mu^-(\mu^+)$	105.7	2.2×10^{-6}	-1(+1)	$\frac{1}{2}$		1(-1)			
	$\tau^-(\tau^+)$	1777	2.9×10^{-13}	-1(+1)	$\frac{1}{2}$			1(-1)		
介子	$\pi^+(\pi^-)$	139.6	2.6×10^{-8}	+1(-1)	0					0(0)
	$\pi^0(\pi^0)$	135.0	0.8×10^{-16}	0	0					0(0)
	$\pi^-(\pi^+)$	139.6	2.6×10^{-8}	-1(+1)	0					0(0)
	$K^+(K^-)$	493.7	1.2×10^{-8}	+1(-1)	0					+1(-1)
	$K_s^0(\bar K_s^0)$	497.7	0.89×10^{-10}	0(0)	0					+1(-1)
	$K_l^0(\bar K_l^0)$	497.7	5.2×10^{-8}	0(0)	0					+1(-1)
	$\eta^0(\eta^0)$	548.8	$<10^{-18}$	0(0)	0					0(0)
	$\eta'(\eta')$	968	2.2×10^{-21}	0(0)	0					0(0)
重子	$p(\bar p)$	938.3	稳定	+1(-1)	$\frac{1}{2}$				+1(-1)	0(0)
	$n(\bar n)$	939.6	932	0(0)	$\frac{1}{2}$				+1(-1)	0(0)
	$\Lambda^0(\bar\Lambda^0)$	1116	2.5×10^{-10}	0(0)	$\frac{1}{2}$				+1(-1)	-1(+1)
	$\Sigma^+(\bar\Sigma^-)$	1189	0.8×10^{-10}	+1(-1)	$\frac{1}{2}$				+1(-1)	-1(+1)
	$\Sigma^0(\bar\Sigma^0)$	1192	0.006×10^{-10}	0(0)	$\frac{1}{2}$				+1(-1)	-1(+1)
	$\Sigma^-(\bar\Sigma^+)$	1197	1.5×10^{-10}	-1(+1)	$\frac{1}{2}$				+1(-1)	-1(+1)
	$\Xi^0(\bar\Xi^0)$	1315	1.7×10^{-10}	0(0)	$\frac{1}{2}$				+1(-1)	-2(+2)
	$\Xi^-(\bar\Xi^+)$	1321	3.0×10^{-10}	-1(+1)	$\frac{1}{2}$				+1(-1)	-2(+2)
	$\Omega^-(\bar\Omega^+)$	1672	1.3×10^{-10}	-1(+1)	$\frac{3}{2}$				+1(-1)	-3(+3)

表 21-2

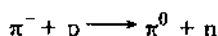
族	自旋	质量 (m_e = 电子质量)	相互作用类型
无质量玻色子	整数	0	电磁，引力
轻子	半整数	$0 \leq M < 207m_e$	弱，电磁
介子	整数	$273m_e < M < 1075m_e$	强，弱， 电磁，引力
重子	半整数	$1836m_e < M$	强，弱 电磁，引力

包括 6 个列在表 21-2 的轻子在内的实验证明轻子是真的基本粒子，它们不由更小的实体复合而成．作为对照，强子(介子和重子)实验表明它们是由称为夸克的更基本的粒子复合而成，我们将在 21.10 节更细致地讨论它们．

21.2 粒子相互作用

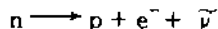
表 21-2 表示在熟悉的引力和电磁相互作用之外，还有两种其他类型的力，粒子可以借助于它们相互作用，它是强相互作用和弱相互作用．

将核子结合在一个核中的力是强相互作用的一个例子．因为质子束缚在一个核中，强相互作用必须要比使质子散开的电磁相互作用要大得多．此外，强相互作用与物体的电荷无关．强相互作用的一个例子是



$$\pi^- + p \longrightarrow \pi^0 + n$$

弱相互作用的存在对于阐明中微子如何与核物质相互作用是必要的．因为中微子没有质量并且不带电荷，它不能有引力*或电磁相互作用．弱相互作用的一个例子是



$$n \longrightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$$

相互作用强度和基本粒子的衰变时间(在衰变前的寿命)两者均由无量纲耦合常数表征．在低能时，耦合常数较大，相互作用较强，而寿命较短．对于电磁相互作用，其耦合常数是

$$\frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

而因电磁衰变的寿命大约为 10^{-16}s．对于强相互作用，耦合常数是 $g^2/\hbar c \approx 13$(g 是出现在汤川理论中的常数)，而强衰变的寿命是约为 10^{-23}s．弱耦合常数约为 3×10^{-12}，弱衰变的平均寿命约为 10^{-8} s．引力耦合常数 $Gm^2/\hbar c$ 大约为 10^{-40}，这里 m 是核质量．在表 21-1 中的全部粒子其寿命都远远大于 10^{-23} s 的强相互作用寿命．

21.3 守恒律

全部粒子反应和衰变服从某些守恒律和选择规则．这里包括下列熟悉的守恒律：

(a)质量-能量

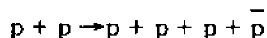
(b)动量

(c)角动量(自旋)

(d)电荷

无论是强、弱或电磁相互作用，这些定律都保持有效．

上面的最后一守恒律中，电荷不仅是守恒的，而且是量子化的，其最小单元是电子电荷的大小 e．量子化电荷守恒是对于每一个粒子给定了一个电荷量子数 $\mathscr{Q}$ = 电荷/e．在反应中，初始和终了的 $\mathscr{Q}$ 值相等．例如在反质子产生，



$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

---

* 中微子也有引力相互作用——译者注．

$$\mathscr{Q}: 1+1=1+1+1-1$$

21.4 轻子守恒

几个其他守恒律或者选择定则相应于另一些量子数守恒.轻子数是指对于轻子 $l=1$,对于反轻子 $l=-1$,对于其他粒子 $l=0$.对于电子,μ 和 τ 以及与之关连的中微子的轻子数已经在表 21-1 给出.在任何过程中,三个轻子数 l_e, l_μ, 和 l_τ 各自守恒.轻子数守恒的例子是:

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$l_e:\quad 0 = 1 + (-1) + 0$$

$$l_\mu:\quad +1 = 0 + 0 + 1$$

$$K^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$l_e:\quad 0 = 0 + 1 + (-1)$$

21.5 重子守恒

类似地,重子数 $\mathscr{B}$ 的定义是:对于重子为 $+1$,对于反重子为 -1,而对于其他粒子为零.对于任何反应或衰变,总重子数守恒.守恒律的例子是

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}$$

$$\mathscr{B}:\quad +1 = +1 + 0 + 0$$

$$K^- + p \to \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^-$$

$$\mathscr{B}:\quad 0 + 1 = +1 + 0 + 0$$

21.6 奇异性守恒

实验上得到 K -介子以及 Λ, Σ, Ξ 和 Ω 重子(这一群称为超子)在强相互作用中总是成对产生,这个现象称为关连产生现象.此外,这些粒子的寿命比 10^{-23}s 要大得多,证明它们并不是以强相互作用方式衰变的(本来可以希望它们如此).为了阐明这种"奇异"现象,一个新的量子数,奇异性 $\mathscr{S}$,被引进,见表 21-1,而 $\mathscr{S}\neq 0$ 的粒子称为奇异粒子.我们发现,总的奇异性(如同普通数字那样相加)在强相互作用和电磁相互作用(或衰变)下是守恒的.在弱相互作用下发现 $\Delta\mathscr{S}=0, \pm 1$.第二个条件 $\Delta\mathscr{S}=\pm 1$,虽然并不是守恒律,禁戒了某些反应,称为选择定则.在强过程中奇异性守恒的一个例子是

$$\pi^+ + p \to \Sigma^+ + K^+$$

$$\mathscr{S}:\quad 0 + 0 = -1 + 1$$

而弱衰变中

$$\Lambda^0 \to \pi^- + p$$

$$\mathscr{S}:\quad -1 \neq 0 + 0$$

奇异性不守恒,但满足奇异粒子选择定则($\Delta\mathscr{S}=+1$).

21.7 同位旋和宇称守恒

为了完备,我们简要地讲述另外两个服从守恒律的量.

表 21-1 显示在一个集团,或多重态中出现的介子和重子具有相近的质量,在某个多重态中的粒子以它们的电荷相区分.例如,三个 π 介子(π^+, π^0, π^-)质量都在 140 MeV 左右,而两个核子(n, p)质量接近于 940 MeV.

介子和重子之间有强相互作用.因为电荷与强作用无关,在一个多重态中的粒子以同样的方式与另外的粒子强作用.但(弱得多的)电磁相互作用生成一些小差别.与电荷无关的性质使得人们引进另一个称作是同位旋的量子数 I,其定义是相应的多重态中有 $2I+1$ 个粒子.于是,对于 π 介子 $I=1$,而对于核子 $I=\frac{1}{2}$.

象角动量一样，同位旋是大小为$\sqrt{I(I+1)}$的矢量，而同位旋的 z 分量 m_I 量子化为

$$m_I = I, I-1, \cdots, -I$$

在多重态中的一个粒子对应着一个 m_I 值，其顺序相当于粒子电荷的递减顺序．于是对于 π 介子，π^+，π^0，π^- 相应于 $m_I = +1, 0, -1$，而对于核子质子和中子分别相当于 $m_I = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$．反粒子多重态与对应的粒子多重态那样有同样的同位旋，但反粒子的 m_I 是对应粒子的 m_I 的负值．表 21-3 是介子和重子的 I 和 m_I．

表 21-3

重子	I \ m_I	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
940 MeV	$\frac{1}{2}$		p		n	
1110 MeV	0			Λ^0		
1190 MeV	1	Σ^+		Σ^0		Σ^-
1320 MeV	$\frac{1}{2}$		Ξ^0		Ξ^-	
1670 MeV	0			Ω^-		
介子						
138 MeV	1	π^+		π^0		π^-
496 MeV	$\frac{1}{2}$		K^+		K^0	
549 MeV	0			η^0		

我们得到在全体强相互作用中，总同位旋(按照矢量相加的结果)是守恒的，而在全体强和电磁过程中，总的 m_I 是守恒的．

另外一个服从守恒律的量是宇称，它在反应中是守恒的，条件是反应的镜象(包含反粒子)也发生．现在知道宇称在强作用和电磁相互作用是守恒的，而在弱相互作用中是不守恒的．

21.8 短寿命粒子和共振态

因为非常短的寿命，粒子例如 π^0 和 η^0($t_m < 10^{-16}$s)和共振态($t_m < 10^{-21}$ s)并不在仪器如气泡室中留下痕迹．它们的存在归之为测量最终衰变产品的能量和动量，并且反过来，利用守恒定律分析测量结果和存在这种未曾观察到的粒子的假定之间的自洽性．例如，当 K^+ 衰变，观察到的是 π^+ 粒子和两个 γ 光子，于是可能认为衰变格式是

$$K^+ \to \pi^+ + 2\gamma$$

但在实验中找到，在质心系中，π^+ 粒子是单能的(见题 21.28)．这个事实排除了 3 粒子衰变(3 粒子衰变将使 π^+ 能量有个分布，见 19.5 节)．正确的衰变是

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^0, \quad \pi^0 \to 2\gamma$$

21.9 八重方式

在 1961 年由 M. 盖尔曼和 Y. 奈曼各自独立地建议了称为八重方式的基本粒子分类格式．八重方式部分地起源于观察到某些类型粒子的对称排列中有奇异数及电荷数．例如，考虑在表 21-1 中的八个重子，它们都有自旋 1/2．当它们的奇异数及其电荷数作为点的坐标时，对电荷数用斜坐标轴，就出现图 21-1 所示的图形．八个重子中的六个构成一个正六边形，而剩下两个重子位于正六边形的中心．如同在已解题中所示的那样，其他的重子和介子集合，按照它们的

自旋进行分类,当考虑电荷数和奇异数时,显示了类似的对称性.

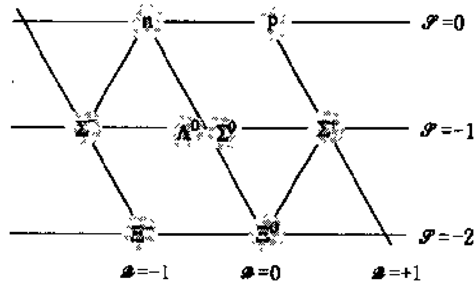


图 21-1

在八重方式对称格式中粒子的规则类似于周期表中元素的规则.特别如果在八重方式对称格式发生空位,这就意味着一个基本粒子去占据这个空位.在自旋3/2重子集合中的空位推动盖尔曼在1962预言存在着一个Ω^-粒子(见题21.15),接着在1964年由布鲁克海文国家实验室的科学家所发现.

八重方式的对称格式表示强子(重子和介子)不是真的基本粒子,而是还有深一层结构就像周期表中的元素具有深一层的结构质子和中子一样.强子的深一层结构是夸克.我们在下一节讨论它.

21.10 夸克

τ轻子和它的中微子ν_τ的发现使得轻子种数达到了6.关于这6种轻子的实验指出它们具有点状结构,并且可以当作是真的基本粒子,即不是由更小的实体复合而成的粒子.

虽然在现时,这里只有6种已知轻子,但却有很多的强子(介子和重子).表21-1所列的只是相对于强相互作用衰变而言稳定的强子,另外还有上百种强子共振态.随着强子的增多,出现了关于它们的增长数的一个较为简单的解释.M.盖尔曼和G.茨威格在1963年建议:强子是由三种称为夸克的基本粒子复合而成的.("夸克"一词是由盖尔曼从James Joyce的Finnegan的足迹一书中借用的.)

现在的情况是强子的成分不止是3种夸克,而是由6种夸克和对应的6种反夸克.夸克和它们的性质一览记在表21-4之中.介子由一个夸克和一个反夸克生成.例如π^+介子有夸克结构($u\bar{d}$),而它的反粒子π^-介子有夸克结构($\bar{u}d$).重子由3个夸克组成而反重子由3个反夸克组成.例如,重子p有夸克结构(uud).短寿命重子Δ^+是p的一个激发态,同样由夸克(uud)复合而成.p和它的激发态Δ^+看作是不同的粒子.基态p有自旋$\frac{1}{2}$和静能938 MeV,而激发态Δ^+有自旋$\frac{3}{2}$和静能1232 MeV.

全体夸克有自旋$\frac{1}{2}$,所以是费米子.泡利不相容原理不允许用两个相同的夸克来构造一个强子.首先看到Δ^+的夸克结构(uud)违反了泡利原理,因为生成的Δ^+有总自旋$\frac{3}{2}$,其中两个u夸克必须有相同的自旋.为了不违反泡利原理,对子夸克指定了一个称为色的量子数.类似于可见的原色,夸克的色记为红、绿,和兰.在Δ^+中两个u夸克并不违反泡利原理,因为它们有不同的颜色.夸克的颜色组合的结果是生成无色强子(看题21.17和21.19).

在基本粒子间的力是交换虚场粒子或场量的结果.这个图景一定程度上像基本粒子利用场量子作捕捉游戏.一个粒子放出一个场量子被第二个粒子的吸收,然后第二个粒子放出场量子返回给第一个粒子.这是不断的捕捉游戏,产生了在两个粒子之间的力.在这图景中,认为场量子中介相互作用.

表 21-4

名称	符号	自旋 (S)	电荷数 (𝒬)	重子数 (ℬ)	奇异数 (𝒮)	粲数	底数	顶数
上	u	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
反上	$\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
下	d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
反下	$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
粲	c	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0
反粲	$\bar{c}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	0	0
奇异	s	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	0	0	0
反奇异	$\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	0
顶	t	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	1
反顶	$\bar{t}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	-1
底	b	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1	0
反底	$\bar{b}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	0

在电磁相互作用中，场量子是光子. 在弱相互作用中，有三个场量子，W^+，W^-和Z^0，称为矢量玻色子. 在强相互作用中，场量子是胶子，它生成夸克之间的强作用力. 到现在为止，尚未在实验中观察到胶子. 在引力相互作用中场量子是引力子，但是它还没有在实验中观察到. 各种场量子的性质在表 21-5 中给出.

表 21-5

玻色子	记号	相互作用	自旋	电荷	质量
胶子	g	强	1	0	0
中间玻色子	W^+	弱，电磁	1	$+e$	80.2 GeV
	W^-	弱，电磁	1	$-e$	80.2 GeV
	Z^0	弱	1	0	91.2 GeV
光子	γ	电磁	1	0	0

寻找单独夸克的许多实验都宣告失败. 考虑到这种情况，粒子物理学家提出了夸克禁闭的理论方案，它说找到单独的夸克是不可能的. 当夸克相互远离，其间的力变得更强，类似于处于不会破裂的拉紧端部的橡皮带所受到的力. 在足够能量下橡皮带的破裂现象现在变成了撑紧的状态，当夸克之间的间隔增大时，在它们之间的作用力上存贮的能量为无穷大，于是使夸克仍然限制在它们的强子边界内.

于是，夸克禁闭的注释给出了这样一幅图景，其中全部强子的基本构造单元—夸克—是不可观察的.

例题详解

21.1　一个 150 MeV K^+ 粒子衰变为 $2\pi^+ + \pi^-$. 在感光乳胶中测量的结果是两个 π^+ 的动能为 68.6 MeV 和 80.8 MeV，而 π^- 的为 75.5 MeV. 寻找反应的 Q 值及 K^+ 的质量.

解　反应是 $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$，所以

$$Q = K_{\pi^+} + K_{\pi^+} + K_{\pi^-} - K_{K^+}$$
$$= 68.6\ \text{MeV} + 80.8\ \text{MeV} + 75.5\ \text{MeV} - 150\ \text{MeV} = 74.9\text{MeV}$$

从 $Q = (m_{K^+} - 2m_{\pi^+} - m_{\pi^-})c^2$，我们得到

$$m_{K^+}c^2 = Q + (2m_{\pi^+} + m_{\pi^-})c^2$$
$$= 74.9\ \text{MeV} + 3(139.6\ \text{MeV}) = 493.7\ \text{MeV}$$

21.2　对于下述粒子系统：(a)$\pi^+ + p$，(b)$\pi^- + p$ 给出可能的同位旋值和它的 z 轴分量.

解　(a)对于 π^+，$I = 1$，$m_I = 1$，而对于 p，$I = \frac{1}{2}$，$m_I = \frac{1}{2}$，所以总的 $m_I = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. 总同位旋的仅有可能值是

$$I = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(b)对于 π^-，$I = 1$，$m_I = -1$，而对于 p，$I = \frac{1}{2}$，$m_I = \frac{1}{2}$；所以总的 $m_I = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. 这里有两种可能的总同位旋值

$$I = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\quad I = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

21.3　在下面各种反应中(全部反应都是强作用反应)：

(a)$\overline{K}^- + p \to K^+ + X$

(b)$\pi^- + p \to K^0 + X$

(c)$p + p \to \pi^+ + n + \Lambda^0 + X$

对于未知的 X，怎样的粒子 X 才是可能的？

解　对于每个反应写下各种守恒律，我们有：

(a)电荷数：　$-1 + 1 = +1 + \mathscr{Q}$　或　$\mathscr{Q} = -1$

轻子数：　$0 + 0 = 0 + l$　　$l = 0$

重子数：　$0 + 1 = 0 + \mathscr{B}$　　$\mathscr{B} = 1$

奇异数：　$-1 + 0 = +1 + \mathscr{S}$　　$\mathscr{S} = -2$

同位旋的 z 分量：　$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + m_I$　　$m_I = \frac{1}{2}$

符合这些性质的 X 是 Ξ^- 粒子

(b)电荷数：　$-1 + 1 = 0 + \mathscr{Q}$　或　$\mathscr{Q} = 0$

轻子数：　$0 + 0 = 0 + l$　　$l = 0$

重子数：　$0 + 1 = 0 + \mathscr{B}$　　$\mathscr{B} = 1$

奇异数：　$0 + 0 = 1 + \mathscr{S}$　　$\mathscr{S} = -1$

同位旋的 z 分量：　$-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + m_I$　　$m_I = 0$

符合这些条件的 X 是 Σ^0 或 Λ^0 粒子.

(c)电荷数：　$+1 + 1 = +1 + 0 + 0 + \mathscr{Q}$　或　$\mathscr{Q} = 1$

轻子数：　$0 + 0 = 0 + 0 + 0 + l$　　$l = 0$

重子数：　$+1 + 1 = 0 + 1 + 1 + \mathscr{B}$　　$\mathscr{B} = 0$

奇异数：　$0 + 0 = 0 + 0 - 1 + \mathscr{S}$　　$\mathscr{S} = +1$

同位旋的

z 分量:　　$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}+0+m_I$　　　$m_I=\frac{1}{2}$

符合这些条件的 X 是 K^+ 介子.

21.4　在下面各对中，确定那一个反应是可能的?

(a)　$\pi^- + p \to \Sigma^0 + \eta^0$
　　$\pi^- + p \to \Sigma^0 + K^0$　　（强作用）

(b)　$\Sigma^- \to \pi^- + \eta$
　　$\Sigma^- \to \pi^- + p$　　（弱衰变）

(c)　$p + p \to K^+ + \Sigma^+$
　　$p + p \to K^+ + p + \Lambda^0$　　（强作用）

(d)　$\pi^- + p \to n + \gamma$
　　$\pi^- + p \to \pi^0 + \Lambda^0$　　（强作用）

(e)　$n \to p + e^- + \nu_e$
　　$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$　　（弱衰变）

解　☞ 在表 21-6 中在最后一列标记着"无"的反应遵守适用的全部的守恒律,因此是可能的反应.

表 21-6

反应对	电荷数($\mathcal{Q}$)	轻子数(l_e)	重子数($\mathcal{B}$)	奇异数($\mathcal{S}$)	同位旋子分量(m_I)	所违反的守恒律
(a) $\pi^- - p \to \Sigma^0 + \eta^0$	$-1+1=0+0$	$0+0=0+0$	$0+1=1+0$	$0+0\neq -1+0$	$-1+\frac{1}{2}\neq 0+0$	$\mathcal{S}, m_I$
$\pi^- - p \to \Sigma^0 + K^0$	$-1+1=0+0$	$0+0=0+0$	$0+1=1+0$	$0+0=-1+1$	$-1+\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}$	无
(b) $\Sigma^- \to \pi^- + n$	$-1=-1+0$	$0+0=0+0$	$1=0+1$	（不适用）	（不适用）	无
$\Sigma^- \to \pi^- + p$	$-1\neq -1+1$	$0+0=0+0$	$1=0+1$			$\mathcal{Q}$
(c) $p + p \to K^+ + \Sigma^+$	$1+1=1+1$	$0+0=0+0$	$1+1\neq 0+1$	$0+0=1-1$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}+1$	$\mathcal{B}, m_I$
$p + p \to K^+ + p + \Lambda^0$	$1+1=1+1+0$	$0+0=0+0$	$1+1=0+1+1$	$0+0=1+0-1$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0$	无
(d) $\pi^- + p \to n + \gamma$	$-1+1=0+0$	$0+0=0+0$	$0+1=1+0$	$0+0=0+0$	$-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+0$	无
$\pi^- + p \to \pi^0 + \Lambda^0$	$-1+1=0+0$	$0+0=0+0$	$0+1=0+1$	$0+0\neq 0-1$	$-1+\frac{1}{2}\neq 0+0$	$\mathcal{S}, m_I$
(e) $n \to p + e^- + \nu_e$	$0=+1-1+0$	$0\neq 0+1+1$	$0=0+0+0$	（不适用）	（不适用）	l
$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$	$0=+1-1+0$	$0=0+1-1$	$0=0+0+0$			无

21.5　说明为什么衰变 $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$ 可以观察到,而 $\Sigma^0 \to p + \pi^-$ 或 $\Sigma^0 \to n + \pi^0$ 不能观察到.

解　☞ 在衰变

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$$
$$\mathcal{S}:\ -1=-1+0$$

奇异数守恒,而 Σ^0 的寿命($\approx 10^{-14}$ s)指出这个衰变是较快的电磁过程,而不是较慢的弱相互作用(寿命$\approx 10^{-10}$ s).衰变

$$\Sigma^0 \to p + \pi^-$$
$$\mathcal{S}:\ -1 \neq 0+0 \qquad (\Delta\mathcal{S}=+1)$$
$$\Sigma^0 \to n + \pi^0$$
$$\mathcal{S}:\ -1 \neq 0+0 \qquad (\Delta\mathcal{S}=+1)$$

因为奇异数改变,必须是弱作用过程.

21.6 图 21-2 所示的两组气泡室径迹(磁场指向纸面)辨认未知的中性粒子(虚线所表示的轨迹).

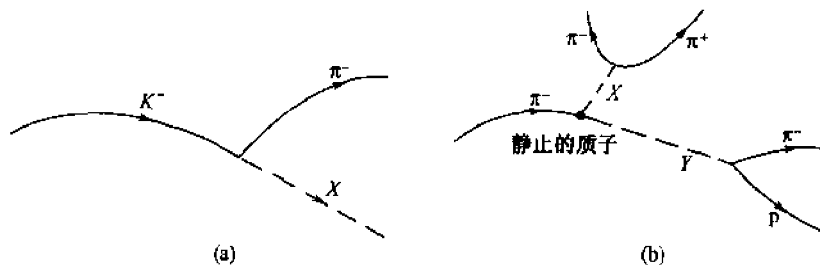


图 21-2

解 ☞ (a)反应 $K^- \to \pi^- + X$. 必须满足的守恒律是

同位旋:　$0 = 0 + \mathscr{S}$

轻子数:　$0 = 0 + l$

重子数:　$0 = 0 + \mathscr{B}$

于是 $\mathscr{S} = l = \mathscr{B} = 0$. 从表 21-1 看到未知粒子是一个中性介子,可能是 π^0, K^0, $\overline{K}^0$ 或 η^0. 因为亲代 K 的静止质量必须大于子代的组合质量(自发衰变有 $Q>0$),仅有的可能性是 X 为 π^0 介子.

(b)粒子 X 的衰变是 $X \to \pi^+ + \pi^-$. 将守恒律用到这个衰变上有

同位旋:　$\mathscr{S} = +1 - 1 = 0$

轻子数:　$l = 0 + 0 = 0$

重子数:　$\mathscr{B} = 0 + 0 = 0$

与情况(a)一样,可供选择的是 π^0, K^0, $\overline{K}^0$ 或 η^0. 现在由于 $Q>0$, 故 π^0 介子不符合要求. η^0 介子的寿命太短($T_m < 10^{-18}$ s),它的径迹不可能在图上观察到. 于是 X 粒子仅可能是 K^0 或 $\overline{K}^0$ 介子. 正确的选择要在确定粒子 Y 之后才能作出.

粒子 Y 的衰变是 $Y \to \pi^- + p$. 应用守恒律到这个衰变上有

同位旋:　$\mathscr{S} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

轻子数:　$l = 0 + 0 = 0$

重子数:　$\mathscr{B} = 0 + 1 = +1$

从表 21-1, 这些性质表示粒子 Y 是一个中性重子,为 n, Λ^0, Σ^0 或 Ξ^0 中之一. 因为亲代质量必须大于子代的组合质量,所以中子被排除在外. 因为 Y 是弱衰变,我们知道 $\Delta\mathscr{S} = 0, \pm 1$; 而因为 $\pi^- + p$ 有 $\mathscr{S} = 0$, 于是知道粒子 Y 有 $\mathscr{S} = 0, \pm 1$, 这样排除了 Ξ^0, 从题 21.5 我们看到 Σ^0 衰变是

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$$

所以粒子 Y 必须是 Λ^0, 它有 $\mathscr{S} = -1$ 而 $I = m_I - 0$.

为了确定 X, 我们回到原始的强相互作用反应,它们必须是

$$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0$$

$$\mathscr{S}:\quad 0 + 0 = 1 - 1$$

或

$$\pi^- + p \to \overline{K}^0 + \Lambda^0$$

$$\mathscr{S}:\quad 0 + 0 \neq -1 - 1$$

第二个反应奇异数不守恒,所以 $\overline{K}^0$ 被排除,最后 X 必须是 K^0.

21.7 一个 Σ^0 粒子在静止时衰变为 Λ^0 粒子. 确定放出的光子的能量.

解 ☞ 这里反应是 $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$. 从动量守恒我们有,利用相对论关系 $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$,

$$p_\Lambda = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \qquad p_\Lambda^2 c^2 = E_\Lambda^2 - (M_\Lambda c^2)^2 = E_\gamma \tag{1}$$

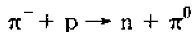
从能量守恒我们有

$$M_\Sigma c^2 = E_\Lambda + E_\gamma \quad 或 \quad E_\Lambda^2 = (M_\Sigma c^2)^2 - 2E_\gamma M_\Sigma c + E_\gamma^2 \tag{2}$$

联立式(1)和(2),我们得到

$$E_\gamma = \frac{(M_\Sigma c^2)^2 - (M_\Lambda c^2)^2}{2M_\Sigma c^2} = \frac{(1192\ \text{MeV})^2 - (1116\ \text{MeV})^2}{2(1192\ \text{MeV})} = 73.6\ \text{MeV}$$

21.8　如果 π^- 和 p 初始处于静止状态,确定在反应



$$\pi^- + \text{p} \rightarrow \text{n} + \pi^0$$

中产物的能量.

解 ☞ 从动量守恒,

$$p_n = p_{\pi^0} \quad 或 \quad (p_n c)^2 = (p_{\pi^0} c)^2 \tag{1}$$

对于各个最后产品都应用能量和动量之间的相对论关系,我们有

$$E_n^2 = E_{0n}^2 + (p_n c)^2 \quad E_{\pi^0}^2 = E_{0\pi^0}^2 + (p_{\pi^0} c)^2$$

将它们相减并且利用(1)有

$$E_n^2 - E_{\pi^0}^2 = E_{0n}^2 - E_{0\pi^0}^2 = (939.6\ \text{MeV})^2 - (135.0\ \text{MeV})^2$$
$$= 8.646 \times 10^5 (\text{MeV})^2$$

或者

$$(E_n + E_{\pi^0})(E_n - E_{\pi^0}) = 8.646 \times 10^5 (\text{MeV})^2 \tag{2}$$

由于能量守恒

$$E_n + E_{\pi^0} = E_{0\pi} + E_{0p} = 139.6\ \text{MeV} + 938.3\ \text{MeV} = 1077.9\ \text{MeV} \tag{3}$$

将它代进式(2),我们得到

$$(1077.9\ \text{MeV})(E_n - E_{\pi^0}) = 8.646 \times 10^5 (\text{MeV})^2$$
$$E_n - E_{\pi^0} = 802.1\ \text{MeV} \tag{4}$$

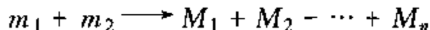
将式(3)和(4)联立求解,我们有

$$E_n = 940.0\ \text{MeV}, \qquad E_{\pi^0} = 137.9\ \text{MeV}$$

从这里有

$$K_n = E_n - E_{0n} = 940.0\ \text{MeV} - 939.6\ \text{MeV} = 0.4\ \text{MeV}$$
$$K_{\pi^0} = E_{\pi^0} - E_{0\pi^0} = 137.9\ \text{MeV} - 135\ \text{MeV} = 2.9\ \text{MeV}$$

21.9　如果目标 m_2 是静止的,求出高能反应



$$m_1 + m_2 \longrightarrow M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

的阈能.

解 ☞ 这个计算必须是相对论方式的.在实验室系统中,m_2 是静止的,

$$E_{\text{lab}} = (m_1 c^2 + K_1) + m_2 c^2 \tag{1}$$

在质心系中,总动量是零,而在阈能条件下,最终的全部粒子以静止的方式创造出来.于是

$$E_{\text{cm}} = (M_1 + M_2 + \cdots + M_n) c^2 \tag{2}$$

对于一个粒子系统,量 $E^2 - (pc)^2$ 是不变的,这里 E 是粒子的能量和,而 p 是粒子动量的矢量和的大小.于是,因为在实验系统中的总动量就是入射粒子 m_1 的动量,

$$E_{\text{lab}}^2 - (p_1 c)^2 = E_{\text{cm}}^2$$
$$[(m_1 c^2 + K_1)^2 + m_2 c^2]^2 - (p_1 c)^2 = [(M_1 + M_2 + \cdots + M_n) c^2]^2 \tag{3}$$

又,对于粒子 m_1,

$$(p_1 c)^2 = E_1^2 - (m_1 c^2)^2 = (K_1 + m_1 c^2)^2 - (m_1 c^2)^2 \tag{4}$$

在式(3)和(4)中消去 $(p_1 c)^2$ 后,得到 K_1 的线性方程,解得与反应中(负的)Q 值的关系为

$$K_{\text{th}} = K_1 = -\frac{1}{2m_2}[(m_1 + m_2 - M_1 - M_2 - \cdots - M_n) c^2](m_1 + m_2 + M_1 + M_2 + \cdots + M_n)$$
$$= -\frac{1}{2m_2} Q (m_1 + m_2 + M_1 + M_2 + \cdots + M) \tag{5}$$

注意在低能近似时,我们可以用

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n = m_1 + m_2$$

我们于是从式(5)得到

$$K_{th} = \frac{-Q}{m_2}(m_1 + m_2)$$

与题 20.8 方程(4)的非相对论结果一致.

21.10　求出反应 $p + p \longrightarrow p + p + \pi^0$ 的阈能.

解　从反应,

$$Q = [m_p + m_p - (m_p + m_p + m_\pi)]c^2$$
$$= -m_\pi c^2 = -135 \text{ MeV}$$

这样,由题 21.9,

$$K_{th} = -\frac{Q}{2m_p}(m_p + m_p + m_p + m_p + m_\pi)$$
$$= -\frac{Q}{2m_p c^2}(4m_p + m_\pi)c^2 = \frac{135 \text{ MeV}}{2(938 \text{ MeV})}[4(938 \text{ MeV}) + 135 \text{ MeV}]$$
$$= 280 \text{ MeV}$$

若用前面所述的反应来产生 π^0 介子,这是加速器必须要给质子的最小能量.

21.11　从反应 $\pi^- + p \longrightarrow n + \gamma$ 确定 π^- 介子自旋的可能值.

解　从内禀角动量守恒我们有

$$\mathbf{s}_\pi + \mathbf{s}_p = \mathbf{s}_n + \mathbf{s}_\gamma$$

而 $|\mathbf{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$. 在右方我们有 $s_n = 1$, 而 $s_\gamma = 1$. 质子有 $s_p = \frac{1}{2}$, 所以 s_p 是 0 或 1.

21.12　求出量 $\tau_0 \equiv \hbar / m_\pi c^2$.

解

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{m_\pi c^2} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{140 \times 10^6 \text{ eV}} = 4.7 \times 10^{-24} \text{ s}$$

如果我们把强相互作用看作是交换一个 π 介子,于是在核子内过程例如

$$n \longrightarrow p + \pi^-$$

可以发生,但质量-能量守恒律在自由核子中禁戒了这种过程.按照量子力学,由海森伯测不准关系

$$\Delta t \Delta E \approx \hbar \quad \text{或} \quad \tau_0(m_\pi c^2) \approx \hbar \quad \text{或} \quad \tau_0 \approx \frac{\hbar}{m_\pi c^2}$$

如果时间是 τ_0 数量级,则过程中的能量可偏离 $m_\pi c^2$. 因此,强相互作用过程发生的时间范围约为 10^{-24} s.

21.13　估计 π 介子的质量.

解　如果 π 介子场的范围 a 差不多是核的大小,并且假定 π 介子传播速度接近光速,于是 $a = c\tau_0$, 这里 τ_0 是 π 介子穿过核所在的范围的时间. 因为 $a = 1.4$ fm(近似的核大小)而 $\tau_0 = \hbar / m_\pi c^2$, 这个时间与从海森伯测不准原理所得的一致(题 21.12). 我们有

$$1.4 \text{ fm} = \frac{c\hbar}{m_\pi c^2} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_\pi c^2} \quad \text{或} \quad m_\pi c^2 = 141 \text{ MeV}$$

这与所观察到的 π 介子质量符合得相当好(表 21-1).

21.14　类似于图 21-1, 对于在表 21-1 中的九个自旋 0 的介子, 以它们各自的奇异数及电荷数作为坐标. 讨论所得的对称图形的特点.

解　在表 21-1 中的 9 个自旋为 0 的介子的电荷数和奇异数, 考虑到粒子和反粒子, 如下.

介子	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{S}$
π^+	+1	0
π^0	0	0
π^-	-1	0

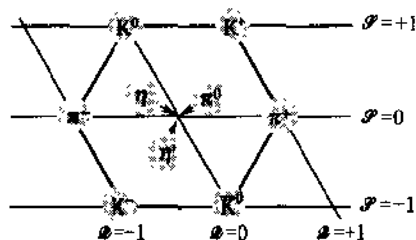


图 21-3

K^+	+1	+1
K^0	0	+1
$\overline{K}^0$	0	+1
K	−1	−1
η	0	0
η'	0	0

当奇异数与电荷数,电荷数用斜坐标轴,配对打点,获得了图 21-3 所示的格式.图 21-3 表示有一个六边形,而有 6 个粒在 6 边形边界上,对径点的另一端是对应的反粒子.剩下的 3 个粒子,它们是自身的反粒子,位于 6 边形中心.

21.15　在 1964 年之前,曾经在实验中观察到 9 个自旋 $-\frac{3}{2}$重子:

重子	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{S}$
Δ^-	−1	0
Δ^0	0	0
Δ^+	+1	0
Δ^{++}	+2	0
Σ^{*-}	−1	−1
Σ^{*0}	0	−1
Σ^{*+}	+1	−1
Ξ^{*-}	−1	−2
Ξ^{*0}	0	−2

解　☞ 类似于图 21-1,对于这 9 个自旋$\frac{3}{2}$重子以奇异数和电荷数标记位置,得到如图 21-4 的格式.

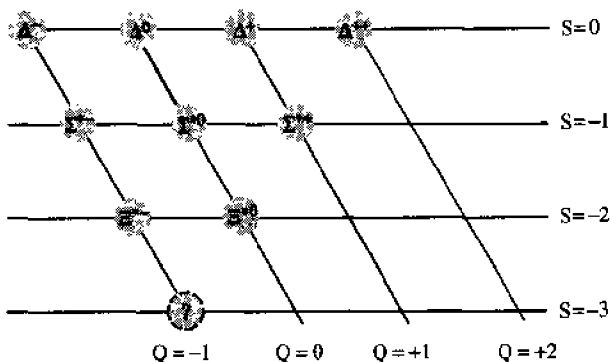


图 21-4

图 21-4 显示了一个图形,它像在平面上钉了 10 个大头钉,但丢失了顶端的大头钉.盖尔曼相信八重方式的对称格式,在 1961 年提出了存在着第 10 个自旋$\frac{3}{2}$的重子,其电荷数为 −1,奇异数为 −3,他称这个粒子为 Ω^- 粒子,它必然占有这八重法格式还未曾有粒子的位置.在 1962 年,布鲁克海文国家实验室的科学家从实验上观察到了 Ω^- 粒子.

21.16　介子由夸克-反夸克对构成.证明夸克结构$(u\,\overline{d})$给出如同列在表 21-1 中的 π^+-介子同样的电荷数,自旋和奇异数.

解　☞ 从表 21-4,我们得到$(u\,\overline{d})$对的参数

电荷数：　$\mathscr{Q}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

自旋：　$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

奇异数：　$\mathscr{S}=0+0=0$

这个结果与表21-1的π^+介子的$\mathscr{Q}$,S和$\mathscr{S}$值一致.

21.17　介子的净色为白色,怎样从夸克颜色复合上去阐明它.

解　☞ 复合成介子的夸克-反夸克对有给定的颜色和反颜色(例如,红和反红),它们组合给出了净白色.

21.18　重子由三个夸克构成,反重子由三个反夸克构成.证明夸克结构(u,u,d)与列在表21-1中的p有相同的电荷数,自旋,重子数和奇异数.

解　☞ 从表21-4,我们找到(u,u,d)组合:

电荷：　$\mathscr{Q}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1$

自旋：　$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

重子数：　$\mathscr{B}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$

奇异数：　$\mathscr{S}=0+0+0=0$

这些数值与给在表21-1的重子p的$\mathscr{Q}$,S,$\mathscr{B}$和$\mathscr{S}$的值一致.

21.19　重子的净色是白色,如何从夸克的颜色组合上去解释.

解　☞ 组成重子的三个夸克具有红,绿和兰,其结果是净白色.同样的理由对反重子也适用,这时三种颜色是反红,反绿和反兰.

补充习题

21.20　寻找反应$p+p\longrightarrow p+p+p+\bar{p}$的阈能.

答案:5630 MeV

21.21　给出粒子K^++p系统的同位旋和它的z分量值.

答案:$m_I=1$, $I=1$

21.22　Ω^-的三个衰变

(a)$\Omega^-\longrightarrow\Xi^-+\pi^0$　(b)$\Omega^-\longrightarrow\Lambda^0+K^-$　(c)$\Omega^-\longrightarrow\Sigma^-+K^0$

中,哪一个是不可能的?

答案:(c)

21.23　μ^+弱衰变为正电子和中微子.在最终态中观察到哪一些中微子?

答案:$\nu_e+\bar{\nu}_\mu$

21.24　下述的强反应:

(a)$p+p\longrightarrow p+n+K^+$　(b)$p+p\longrightarrow\Lambda^0+K^0+p+\pi^+$

中,哪一个是可能的?

答案:(b)

21.25　在反应式$p\longrightarrow\pi^0+e^++e^-$中违反了哪一个守恒律?

答案:$\mathscr{B}$和$\mathscr{Q}$

21.26　对于衰变$\Lambda^0\longrightarrow p+\pi^-$,$\Lambda^0$在初始时静止,求出$\pi^-$的动能.

答案:32.7 MeV

21.27　对于衰变$\pi^-\longrightarrow e^-+\bar{\nu}_e$,$\pi^-$初始时静止,求$e^-$的动能.

答案:69.3 MeV

21.28　对于衰变$K^+\longrightarrow\pi^++\pi_0$（$\pi_0\to2\gamma$）,计算在$K^+$静止系(即质心系)中$\pi^+$的动能.

答案:108 MeV

21.29　证明考虑到表21-1所示的介子性质,有下述的夸克-反夸克组合.

$\pi^-: (\bar{u}, d)$　$\pi^+: (u, \bar{d})$　$K^+: (u, s)$　$K^-: (\bar{u}, s)$　$K^0: (d, \bar{s})$

21.30 证明考虑到表 21-1 所给出的重子性质，它们有下述的夸克组合

$p: (u, u, d)$　$n: (u, d, d)$　$\Sigma^+: (u, u, s)$　$\Sigma^0: (u, d, s)$　$\Sigma^-: (d, d, s)$

$\Lambda^0: (u, d, s)$　$\Xi^0: (u, s, s)$　$\Xi^-: (d, s, s)$　$\Omega^-: (s, s, s)$

第Ⅵ部分 原子系统

第22章 分子

22.1 分子键

离子键是大多数盐类中的键,如碱金属(在周期表中第一列——Li, Na, K, …)与卤素(在周期表中第七列——F, Cl, Br, …)相化合.为了阐明离子键,我们来分析典型的盐 KCl.钾($_{19}$K)在其惰性的氩实之外有一个 4s 电子($1s^22s^22p^63s^23p^64s^1 = {}_{18}Ar + 4s^1$).因为最后一个电子是弱束缚的,其离解能仅有 4.34eV,它很容易成为钾离子 K^+.氯($_{17}$Cl)还需要一个电子才能组成 3p 封闭壳层($1s^22s^22p^63s^23p^5 = {}_{18}Ar - 3p^1$),所以结合一个额外电子到氯原子上以形成负氯离子 Cl^- 还是相对容易的.具有接受一个额外电子能力的中性原子,氯即是一例,称为有电子亲和性.从 Cl^- 离子移走一个电子以恢复成中性 Cl 原子的能量已测出是 3.62eV,它称为电子亲和能.这个能量必须加上的事实表示氯离子的总能量实际上比中性氯原子的总能量低 3.62eV.

KCl 分子的形成可以分为两步.首先是中性钾丢掉一个电子而成为 K^+ 离子,并且这个电子传送到中性氯原子上以形成 Cl^- 离子.在这个过程中必须有 4.34eV 加到钾原子上,但有 3.62eV 由 Cl 原子返回,从而形成 K^+Cl^- 对需要净能量是 4.34eV − 3.62eV 或 0.72eV.在下一步可以想到的是 K^+ 和 Cl^- 互相吸引而形成中性的 KCl 分子.在这个过程中因为是电荷相反的两个离子之间的库仑引力,单个分子的能量将会减少.系统的最后总能量是形成 K^+Cl^- 所需要的 0.72eV 与组合离子的库仑能之差.如果总能量是负值,KCl 分子是稳定的,因为若拆开分子成为原始的 K 和 Cl 原子需要能量.实验上已经找到 KCl 的离子隔开距离 $r_0 = 2.79$Å 而 KCl 具有拆解能量 4.42eV.

因为在两个离子之间的库仑力是吸引力,粗看起来可能会认为不会有稳定的构造.但是,在充分小的距离下,离子中的电子产生了排斥效应,这是因为电子间的库仑力,也还因为泡利不相容原理.于是,因为在大间隔有吸引力,在小间隔有排斥力,这里存在着某个合适的间隔使 K^+ 和 Cl^- 离子处于平衡状态.

分子如 H_2, Cl_2, NO 是由所谓的共价键结合的.为了详细地阐明共价键需要在两个核影响下多电子系统的量子力学解.虽然量子力学解是在本书范围之外,但它的结果可用来阐明共价键.

作为共价键的一个例子,我们考虑最简单的共价分子 H_2.H_2 分子可以看作是两个正电荷和在它们的电磁场中运动着两个电子.这两个电子可以处于总自旋 $S = 0$ 的状态(单态,自旋反向排列)或者 $S = 1$ 的状态(三重态,自旋方向相同).量子力学解表明单态的能量较低.并且两个电子的最概然位置是在两个氢核之间.在电子两方的质子吸引负电荷的电子在它们之间,其结果就是使这两个质子结合在一起的力出现.

H_2^+ 分子成键的方式本质上与中性的 H_2 分子相同,但是因为现在只有一个电子在吸引两个质子,其键较弱.对于 H_2 键能是 4.48eV,而原子间隔是 0.74Å,但对于 H_2^+,键能是 2.65eV,而原子间隔是 1.06Å.

在共价键和离子键之间的区别是:在共价键中电子实际上为各个原子共享,而在离子键中一个电子从一个原子传到另一个原子上.在最大多数的化学键中,各种类型的键都有一些贡

献.

这两种类型的键之间的不同也在离子束缚和共价束缚分子的电偶极矩的相对大小中表现出来.一个电偶极子可以大体上想像作是两个数量相等但符号相反的带电粒子,两者隔开一个小距离 d;电偶极矩矢量 $\mathbf{p}$ 的大小 $p = Qd$,这里 Q 是其中任何一个粒子的电荷大小,而偶极矩的矢量方向是由负电荷指向正电荷.离子键分子的电偶极矩比起来较大,因为两个带电离子之间有比较大的间隔.另外,对于共价键分子,这里电子位于两个核之间,这里显然有由两个带正电核和带负电电子生成的两个偶极矩.因为它们的指向相反,这两个偶极子倾向于互相抵消,其结果是共价键分子实际上不存在偶极矩.

对于两个或多个原子,每个在单独情况下偶极矩为零,但能够相互诱导出偶极矩来.这个诱导出的偶极子可以认为是原子的正负电荷在其邻近原子作用之下分开了一定的距离.在诱导出的电偶极子之间的弱吸引力称作是范德瓦耳斯键.它是在液体和固体状态下键合惰性元素的惟一的力.

在金属中,原子并不以共享或交换电子而键合在一起.代替这个机制的是:许多电子(大致是每个原子贡献一个电子)或多或少是自由地在金属中移动,所以一个电子可以与多个固定原子相互作用.这种只有用量子力学分析才能阐明的相互作用效应构成保留金属形状的金属键.

22.2　双原子分子的激发

在复杂分子中,人们可以找出,除去正规的电子激发之外,分子还可以有旋转和振动运动.我们将把我们的讨论限制在双原子(两个原子)分子之中,它显示了全部分子激发的重要特征而又不引进过多的数学复杂性.

双原子分子的旋转运动可以当作是哑铃围绕它的质心的定轴转动(见图 22-1)如果围绕着质心的转动惯量是 I,由于这个转动而成的动能是

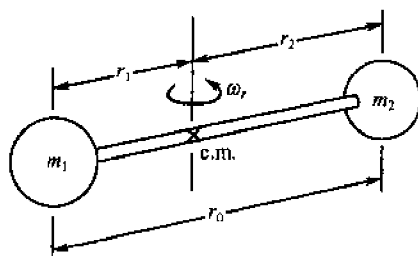


图 22-1

$$E_r = \frac{1}{2} I\omega_r^2 = \frac{1}{2}\frac{(I\omega_r)^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I} \tag{22.1}$$

这里 $\boldsymbol{\omega}_r$ 是旋转角速度,而 $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}_r$ 是系统的角动量.

多电子原子,分子的动量矩也可以量子化,并且认为只具有下而的离散值

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \qquad l = 0,1,2,\cdots \tag{22.2}$$

由式(22.1)给出的转动能于是也是量子化的所取的数值是

$$E_r = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} \tag{22.3}$$

一个典型的旋转能级图在图 22-2(a)中画出

维持一个双原子分子的化学键同时允许发生振动运动,其方式与在弹簧两端各附上一个质量的振动类似.对于很小的能量,这个分子的振动可以近似地认为是简谐的.量子力学的处理证明谐振子只能有离散的振动能量,其数值是

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega_v, \qquad n = 0,1,2\cdots \tag{22.4}$$

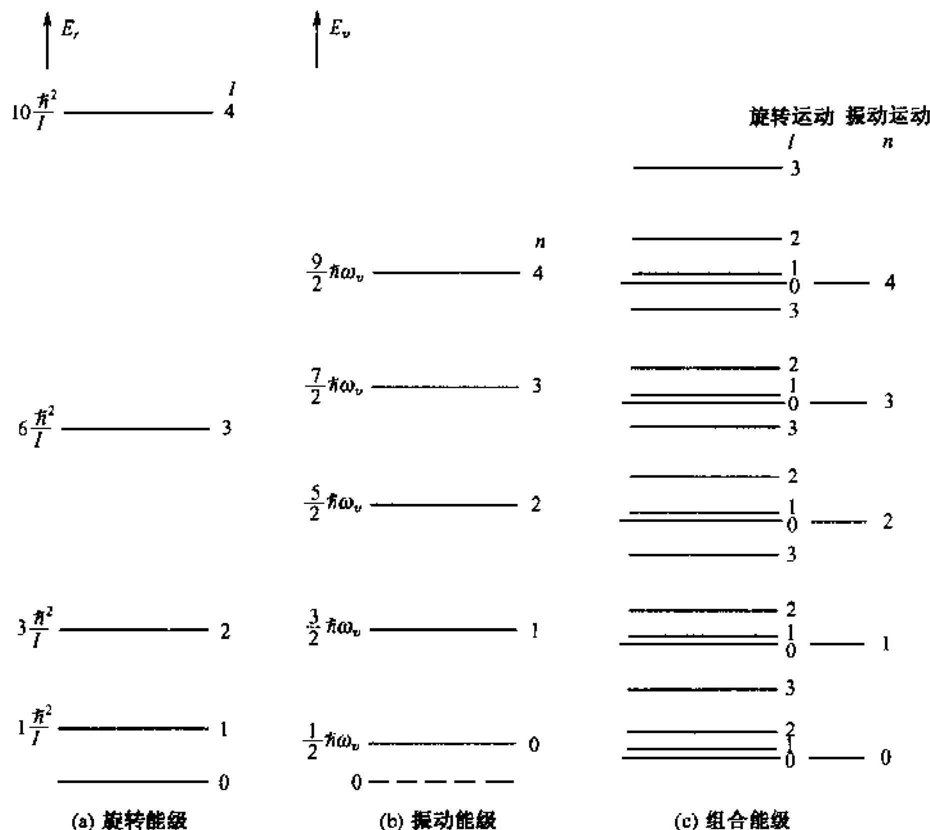


图 22-2

这里 ω_v 是振动角频率，它与系统的劲度系数和折合质量有关.

从式(22.4)看到最低振动能是 $E_0=\frac{1}{2}\hbar\,\omega_v$. 于是，在最低能量上，分子并不静止而是围绕平衡点作某种最小的振动. 方程(22.4)指出谐振子的能级是等间隔的，其大小为 $\hbar\,\omega_v$. 但在比较高的能级上，谐振子的近似有些误差，能级之间的距离要比式(22.4)所指出的要小一些. 典型的谐振子能级图见图 22-2(b).

实际上已知振动能级的间隔大致是转动能级间隔的 10～100 倍(见题 22.13). 在经典观点上看就是在每一个转动中有许多振动周期，所以这两种运动可以独立处理. 图 22-2(c)指出，小的旋转能级附加在较大的振动能级上.

能级之间的变换发生在分子的退激发而放出光子辐射或者是吸收光子的情况. 在低能的大多数情况，跃迁有选择定则

$$\Delta l=\pm 1, \qquad \Delta n=\pm 1$$

振动和转动谱的用处之一是可以得到分子键长和键的劲度系数(见题 22.10 和 22.14).

例题详解

22.1 对于双原子分子的盐类，用它的原子间隔，碱金属的离解能和卤素的电子亲和能写出其离子键分解能的表达式. 将这里所得的结果与表 22-1 所给出实验值 D 相比较.

解 ☞ 双原子分子的离子键的分解可以认为是分作如下三步：(1)从亲和距离 r_0 开始拉开间隔，它要求能量 $-E_c=+ke^2/r_0$(库仑能的变号)；(2)从负卤素离子取出一个电子使它中性化，它所需要的能量等于卤素的电子亲和能 F；(3)加一个电子到碱金属正离子上使它变为中性，需要能量 $-I$，这里是碱金属的离解能.

表 22-1

碱金属	离解能, I	卤素	电子亲和能, F
Li	5.39eV	F	3.45eV
Na	5.14eV	Cl	3.62eV
K	4.34eV	Br	3.36eV
盐	键长, r_0	分解能, D	
LiF	1.56Å	5.95eV	
NaCl	2.51Å	3.58eV	
KCl	2.79Å	4.42eV	
KBr	2.94Å	3.96eV	

于是,分解分子所需要的能量是

$$D = \frac{ke^2}{r_0} + F - I = \frac{14.4\text{eV}\cdot\text{Å}}{r_0} + F - I$$

从表(22-1)的数据,我们有

$$\text{LiF:}\quad D = \frac{14.40\text{eV}\cdot\text{Å}}{1.56\text{Å}} + 3.45\text{eV} - 5.39\text{eV} = 7.29\text{eV}$$

$$\text{NaCl:}\quad D = \frac{14.40\text{eV}\cdot\text{Å}}{2.51\text{Å}} + 3.62\text{eV} - 5.14\text{eV} = 4.22\text{eV}$$

$$\text{KCl:}\quad D = \frac{14.40\text{eV}\cdot\text{Å}}{2.79\text{Å}} + 3.62\text{eV} - 4.34\text{eV} = 4.44\text{eV}$$

$$\text{KBr:}\quad D = \frac{14.40\text{eV}\cdot\text{Å}}{2.94\text{Å}} + 3.36\text{eV} - 4.34\text{eV} = 3.92\text{eV}$$

可以看到计算值与观察到的分解能值符合得相当好.

22.2 估计 KCl($r_0 = 2.79$Å)的偶极矩.

解 ☞ 假定电荷间隔即是原子间隔,电偶极矩为

$$p = Qr_0 = (1.6\times10^{-19}\text{C})(2.79\times10^{-10}\text{m}) = 4.46\times10^{-29}\text{C}\cdot\text{m}$$

(电偶极矩常用单位是 D(德拜), $1D = 3.335641\times10^{-30}$C·m.)实际得到的电偶极矩是 2.64×10^{-29} C·m,说明原子中心比起原子间距来要靠近一些.

22.3 在 H_2 分子中两个质子相距 0.74Å,在这两个质子中间必须要放多大的负电荷使得这个系统具有已经观察到的 4.5eV 的结合能.

解 ☞ 结合能,就是把全部粒子移到无穷远处所需要的能量,等于形成 H_2 分子的总库仑能的绝对值.库仑能的组成成分为两个质子间的正贡献

$$E_+ = \frac{ke^2}{r_0} = \frac{14.40\text{eV}\cdot\text{Å}}{0.74\text{Å}} = 19.5\text{eV}$$

和设置在两个质子中间的未知负电荷 $\delta(-e)$ 的负贡献

$$E_- = \delta(-e)V_{\text{mid}} = -\delta e\left(\frac{ke}{r_0/2} + \frac{ke}{r_0/2}\right)$$

$$= -2\delta\frac{ke^2}{r_0/2} = -2\delta\frac{14.40\text{eV}\cdot\text{Å}}{(0.74\text{Å})/2} = -(77.8\text{eV})\delta$$

从这里有

$$-\text{BE} = E_+ + E_-$$

$$-4.5\text{eV} = 19.5\text{eV} - (77.8\text{eV})\delta$$

$$\delta = 0.308$$

这个数字远小于实际存在于 H_2 分子中的电子数 $\delta = 2$.这两个电子并不刚好停在这个中点而是可能出现在围绕着这两个质子的任何地点.但是从量子力学的分析看来找到这两个电子的最可几地点是两个质子之间的中点.于是电子出现在中点周围的时间最多,从而出现了吸引力并且形成 H_2 分子的共价键.

22.4 两个离子的势能是其间隔的函数,其近似表达式为

$$\mathrm{PE} = -\frac{ke^2}{r} + \frac{b}{r_9}$$

第一项是通常的库仑相互作用,而第二项是考虑到在小距离时两个离子之间的推斥效应而引进的项.求出 b 与平衡位置 r_0 之间的函数关系.

解 ☞ 在平衡距离 r_0 上势能表达式取得极小.求出最小值的方法如下:

$$\left.\frac{\mathrm{d(PE)}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} = \frac{ke^2}{r_0^2} - \frac{9b}{r_0^{10}} = 0 \text{ 或 } b = \frac{ke^2 r_0^8}{9}$$

作为 r 的函数 PE 的一般形状见图 22-3.

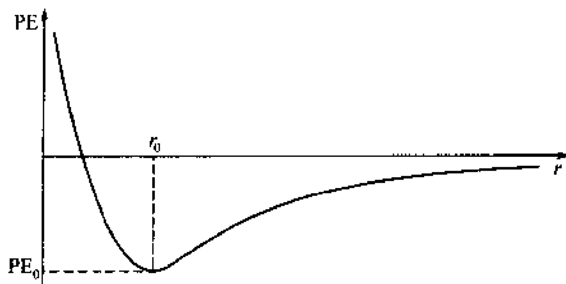


图 22-3

22.5 计算 KCl 在平衡间隔($r_0 = 2.79$Å)下的势能.

解 ☞ 从题 22.4,最小的势能是

$$\mathrm{PE}_0 = \frac{-ke^2}{r_0} + \frac{b}{r_0^9} = -\frac{ke^2}{r_0} + \frac{ke^2}{9r_0} = -\frac{8ke^2}{9r_0}$$

$$= \frac{-8(14.40\mathrm{eV}\cdot\text{Å})}{9(2.79\text{Å})} = -4.59\mathrm{eV}$$

22.6 两个中性原子的势能是其间隔的函数,它的表达式是莫尔斯势

$$\mathrm{PE} = P_0[1 - \mathrm{e}^{-a(r-r_0)}]^2$$

证明 r_0 是原子间隔而 P_0 是分解能。

证 ☞ 位能函数的最小值满足关系

$$\frac{\mathrm{d(PE)}}{\mathrm{d}r} = 2P_0 a\,\mathrm{e}^{-a(r-r_0)}[1 - \mathrm{e}^{-a(r-r_0)}] = 0$$

从这里解出平衡间隔 $r = r_0$.在 $r = r_0$, PE = 0;而在 $r \to \infty$, PE $\to P_0$.于是将原子分开到无穷远所需要的功是

$$P_0 - 0 = P_0$$

这就是分解能.

22.7 考虑一个哑铃式的双原子分子:在一根长为 r_0 的无质量棒两端有质量 m_1 和 m_2.证明对于过系统质心而与哑铃轴的轴的转动惯量为

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 = \mu r_0^2$$

这里 μ 是折合质量(11.3 节).

证 ☞ 两个质点 m_1 和 m_2 相对于过质心轴的转动惯量是

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \tag{1}$$

(见图 22-1).从质心的定义我们得到

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0 \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_0$$

而现在(1)可化为

$$I = m_1\left(\frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$$

22.8　由 $\hbar^2/2I = 1.78 \times 10^{-4}\text{eV}$，确定出 O_2 的原子间隔.

解　☞ 对于 O_2 其约化质量是 $m/2$，这里 $m = 16u$ 是 O 原子的质量，于是从题 22.7，

$$r_0 = \sqrt{\frac{I}{m/2}} = \sqrt{\frac{2Ic^2}{mc^2}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 c^2}{(1.78 \times 10^{-4}\text{eV})mc^2}}$$

$$= \frac{\hbar c}{\sqrt{(1.78 \times 10^{-4}\text{eV})mc^2}} = \frac{1973\text{eV} \cdot \text{Å}}{\sqrt{(1.78 \times 10^{-4}\text{eV})(16\text{u})(931.5 \times 10^6\text{eV})}} = 1.21\text{Å}$$

22.9　证明双原子分子的旋转频谱将由等间隔线组成，间隔是 $\Delta\nu = h/4\pi^2 I$，这里 I 是分子的转动惯量.

证　☞ 从式(22.3)，可能旋转能级是

$$E_r = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$$

两个能级之间的跃迁将会发出(或吸收)一个光子，它的频率 ν 满足关系

$$E_\gamma = h\nu = E_2 - E_1 = \frac{(h/2\pi)^2}{2I}[l_2(l_2+1) - l_1(l_1+1)]$$

$$\nu = \frac{h}{8\pi^2 I}[l_2(l_2+1) - l_1(l_1+1)]$$

因为选择规则 $\Delta l = \pm 1$，我们可选 $l_2 = l_1 + 1$，所以

$$\nu = \frac{h}{8\pi^2 I}[(l_1+1)(l_1+1+1) - l_1(l_1+1)] = \frac{h}{4\pi^2 I}(l_1+1)$$

发射光子的频率由 $l_1 = 0, 1, \cdots$ 确定，所以相邻的线的频率是等间隔的，间隔大小为

$$\Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I}$$

22.10　在 $^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}$ 的旋转谱的相邻线之间的频率间隔的测定值是 11.2GHz. 确定它的原子间距离.

解　☞ 从题 22.9，

$$I = \frac{h}{4\pi^2\Delta\nu} = \frac{6.625 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}}{4\pi^2(11.2 \times 10^9\text{s}^{-1})} = 1.50 \times 10^{-45}\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

于是从题 22.7，

$$r_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)I}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{(35\text{u} + 19\text{u})(1.50 \times 10^{-45}\text{kg} \cdot \text{m}^2)}{(35\text{u})(19\text{u})} \times \frac{1\text{u}}{1.66 \times 10^{-27}\text{kg}}}$$

$$= 2.71 \times 10^{-10}\text{m} \quad 或 \quad 2.71\text{Å}$$

22.11　$^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ 分子的原子间距离是 1.13Å. 确定在可见光范围(5000Å)内的电子跃迁而出现的旋转谱线的相邻两线的波长间隔.

解　☞ 从题 22.7 和 22.9，

$$\Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I} = \frac{h}{4\pi^2 \mu r_0^2}$$

从而

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{c}\frac{h}{4\pi^2\mu r_0^2} = \frac{\lambda^2(hc)}{4\pi^2\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}c^2\right)r_0^2}$$

$$= \frac{(5000\text{Å})^2(12.4\text{MeV} \cdot \text{Å})}{4\pi^2\left[\left(\frac{12 \times 16}{12 + 16}\text{u}\right)(931.5\text{MeV/u})\right](1.13\text{Å})^2} = 0.962\text{Å}$$

22.12　H_2 的平衡间隔为 0.74Å. 确定它的旋转能级.

解　☞ H_2 的旋转能级和转动惯量是

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1) \qquad I = \mu r_0^2 = \frac{m_H}{2}r_0^2$$

于是

$$E_r = \frac{\hbar^2}{m_H r_0^2} l(l+1) = \frac{(\hbar c)^2}{(m_H c^2) r_0^2} l(l+1)$$

$$= \frac{(1973 \text{eV} \cdot \text{Å})^2}{(1.008\text{u})(931.5 \times 10^6 \text{eV/u})(0.74\text{Å})^2} l(l+1) = (7.57 \times 10^{-3} \text{eV}) l(l+1)$$

下面是 H_2 的前四个旋转能级,

l	0	1	2	3	4
E_r, eV×10^{-2}	0	1.51	4.54	9.08	15.1

22.13 估计 $H_2(r_0=0.74\text{Å})$的振动能级间隔.

解 ☞ 考虑氢核间静电相斥同时设想有一个弹簧保证它们不散开.如果弹簧的伸长量等于核间隔,于是可以求出劲度系数 K,

$$F = \frac{ke^2}{r_0^2} = K r_0 \quad 或 \quad K = \frac{ke^2}{r_0^3} = \frac{14.4 \text{eV} \cdot \text{Å}}{(0.74\text{Å})^3} = 35.5 \frac{\text{eV}}{\text{Å}^2}$$

K 与谐振子角频率的关系是

$$\hbar \omega_v = \hbar \sqrt{\frac{K}{\mu}} = \hbar c \sqrt{\frac{K}{\mu c^2}}$$

这里折合质量 μ 等于 $m_H/2$,于是

$$\hbar \omega_v = \hbar c \sqrt{\frac{2K}{m_H c^2}} = (1973 \text{eV} \cdot \text{Å}) \sqrt{\frac{2 \times 35.5 \text{eV/Å}^2}{938 \times 10^6 \text{eV}}} = 0.543 \text{eV}$$

与振动能级间隔同一数量级.从题 22.12 我们看到旋转能级间隔是振动能级间隔的百分之一量级.因此,可以把旋转态认为是附着在振动态上的,如同图 22-2(c)所示.

22.14 波长 3.465μm 的红外辐射被 HCl 气体强烈吸收.问 HCl 分子的劲度系数是多少?

解 ☞ 如果将 HCl 当作是量子化的谐振子;则可以认为只有能量

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_v$$

所吸收的红外光子将使谐振子的能量增加.由于选择定则 $\Delta n = \pm 1$,所得到的增量是

$$\Delta E_n = \left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_v - \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_v$$

$$= \hbar \omega_v = \frac{h}{2\pi} \omega_v$$

令所增加的能量等于光子的能量,我们得到

$$h \frac{c}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \omega_v$$

$$\omega_v = 2\pi \frac{c}{\lambda} = \frac{2\pi(3 \times 10^8 \text{m/s})}{3.465 \times 10^{-6} \text{m}} = 5.44 \times 10^{14} \text{Hz}$$

HCl 分子的折合质量是

$$\mu = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = \frac{(1\text{u})(35\text{u})}{1\text{u} + 35\text{u}} \left(1.661 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{u}}\right) = 1.61 \times 10^{-27} \text{kg}$$

谐振子的角频率与折合质量 μ 及劲度系数 K 有关系 $\omega_v = \sqrt{K/\mu}$,从而

$$K = \mu \omega_v^2 = (1.61 \times 10^{-27} \text{kg})(5.44 \times 10^{14} \text{s}^{-1})^2 = 476 \text{N/m}$$

22.15 参照题 22.14.求出一摩尔 HCl 在绝对零度总振动能.

解 ☞ 在 0K 时全部 HCl 分子都在最低的可能的能量,对应于(22.4)中 $n=0$ 的情况.于是,利用阿伏伽德罗数 N_0,有

$$E_{总} = N_0 \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_v\right) = (6.023 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}) \cdot \frac{1}{2} (1.055 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s})(5.44 \times 10^{14} \text{s}^{-1})$$

$$= 17.3 \text{kJ/mol}$$

22.16 N_2 分子处于 $n=1$ 振动能级的激发态,然后通过放出光子退激发,放出的光子的能量

是多少？（对于每一个振动能级只考虑前 5 个旋转能级.）对于 N_2，$\hbar^2/2I=2.5\times10^{-4}$ eV，$\hbar\omega_v=0.29$eV

解 ☞ 能级的关系式是

$$E=\hbar\omega_v\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{\hbar^2}{2I}l(l+1)$$

能级图见图 22-4.跃迁满足 $\Delta n=-1$，于是有

$$\Delta E=\hbar\omega_v+\frac{\hbar^2}{2I}[l'(l'+1)-l(l+1)]$$

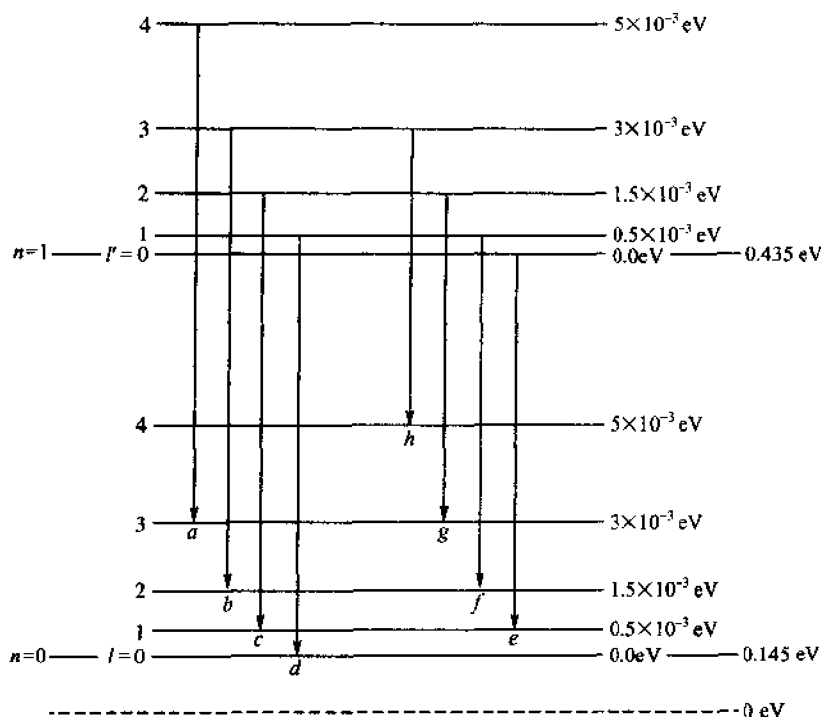


图 22-4

从旋转选择定则 $\Delta l=1$，我们必须有 $l'=l+1$，所以

$$\Delta E=\hbar\omega_v+\frac{\hbar^2}{2I}[2(l+1)],\quad l=0,1,2,\cdots$$

而从选择定则 $\Delta l=-1$，我们必须有 $l'=l-1$，所以

$$\Delta E=\hbar\omega_v+\frac{\hbar^2}{2I}[-2l],\quad l=1,2,3,\cdots$$

这些跃迁总结在表 22-2 之中.从表上可以看到这些能量以量 $\hbar^2/I=0.5\times10^{-3}$eV 隔开，但要除去不出现谱线的 $\Delta E=\hbar\omega_v=0.29$eV 的情况.

表 22-2

跃迁	l	ΔE/eV
a	3	$0.29+2.0\times10^{-3}$
b	2	$0.29+1.5\times10^{-3}$
c	1	$0.29+1.0\times10^{-3}$
d	0	$0.29+0.5\times10^{-3}$
e	1	$0.29-0.5\times10^{-3}$
f	2	$0.29-1.0\times10^{-3}$
g	3	$0.29-1.5\times10^{-3}$
h	4	$0.29-2.0\times10^{-3}$

22.17 某种气体在室温下的吸收谱见图22-5.求出它的零点振动能和分子的转动惯量.

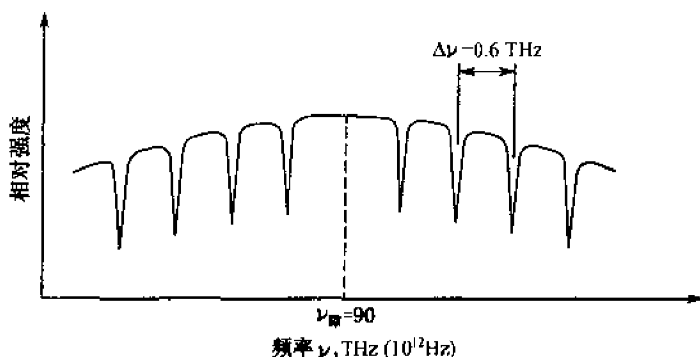


图22-5

解 所示的吸收谱是组合的振动-转动谱.气体中分子吸收光子而产生的激发参见图22-6.在室温($T\approx300$K)下,分子没有足够的能量去占据比 $n=0$ 高的振动带.但是,这里有足够的热能去激发 $n=0$ 的振动带上的不同旋转能级.于是吸收光子将产生到 $n=1$ 的带上的激发,如同图22-6所示.这里选择定则 $\Delta n=\pm1$ 满足.因为选择定则 $\Delta l=\pm1$,这里跃迁划分为 $l\to l+1$ 和 $l\to l-1$ 两组,见图22-6.在终了能级和初始能级之间的能差是振动能差和转动能差之和,它等于所吸收的光子的能量 $h\nu$:

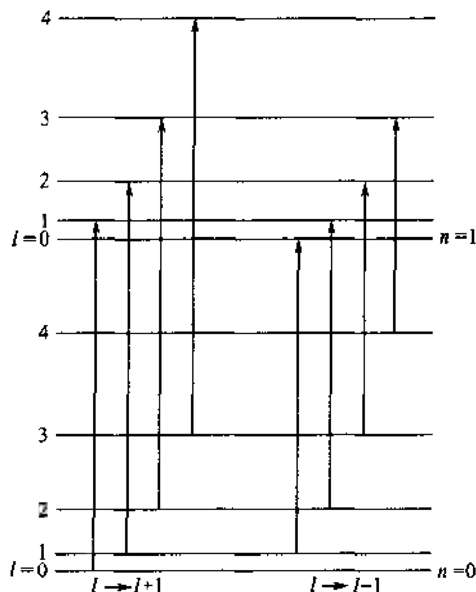


图22-6

$$h\nu=\frac{h}{2\pi}\omega_v+[l_u(l_u+1)-l_l(l_l+1)]\frac{1}{2I}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2$$

或

$$\nu=\frac{\omega_v}{2\pi}+[l_u(l_u+1)-l_l(l_l+1)]\frac{h}{4\pi^2I}$$

对于所指的两组变换,我们有

$$l_u=l_l+1,\quad \nu_1=\frac{\omega_v}{2\pi}+(l_l+1)\frac{h}{4\pi^2I},\quad l_l=0,1,2,\cdots$$

$$l_u=l_l-1,\quad \nu_2=\frac{\omega_v}{2\pi}-l_l\frac{h}{4\pi^2I},\quad l_l=1,2,3,\cdots$$

所吸收光子的频率看来是以 $h/4\pi^2I$ 为单元逐步地从

$$\frac{\omega_v}{2\pi} - 4\frac{h}{4\pi^2 I} \quad (\text{在 } \nu_2 \text{ 中 } l_l = 4)$$

到

$$\frac{\omega_v}{2\pi} + 4\frac{h}{4\pi^2 I} \quad (\text{在 } \nu_1 \text{ 中}, l_l = 3)$$

其中要将在 $\nu_{振} = \omega_v/2\pi$ 上的能级剔除. 从而由测定在相邻能级间的频率差 $\Delta\nu$, 我们可以找出转动惯量,

$$\Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I}$$

$$I = \frac{h}{4\pi^2\Delta\nu} = \frac{6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{4\pi^2(0.6\times10^{12}\text{s}^{-1})} = 2.80\times10^{-47}\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

已知振动频率($\nu_{振} = 90\times10^{12}\text{s}^{-1}$, 图 22-5), 我们有零点振动能:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\,\omega_v = \frac{1}{2}h\nu_{振} = \frac{1}{2}(4.136\times10^{-15}\text{eV}\cdot\text{s})\cdot(90\times10^{12}\text{s}^{-1})$$
$$= 0.186\text{eV}$$

补充习题

22.18 如果将 Na^+ 和 Cl^- 离子当作是点电荷, 它们恰好束缚在一起, 确定它们之间的最小间隔. (Na 的离解能是 5.14eV, Cl 的电子亲和能是 3.62eV, NaCl 的分解能是 3.58eV.)

答案: 2.82Å

22.19 KI 的分解能是 3.33eV, 已知 I 的电子亲和能是 3.06eV 而 K 的离解能是 4.34eV(测得的 KI 键长是 3.23Å)求出它的键长.

答案: 3.12Å

22.20 KI 的电偶极矩是 3.05×10^{-29}C·m, 估计 KI 的键长. (实验上找到的是 $r_0 = 3.23$Å.)

答案: 1.91Å

22.21 设 H_2 中的两个电子位于两个质子之间的中点. 考虑到观察到的结合能 4.5eV, 两个质子之间的间隔是多少?

答案: 9.6Å

22.22 在 H_2^+ 分子中两个质子相距 1.06Å 而结合能是 2.6eV. 若要与这些数据一致, 在两个质子连线中点应当有多少负电荷?

答案: 0.298e

22.23 利用题 22.19 中的数据, 计算在平衡位置时 KI 的势能.

答案: −4.10eV

22.24 在某种分子的旋转谱中相邻线的频率间隔测出是 40GHz. 这个分子的转动惯量是多少?

答案: 4.20×10^{-46}kg·m²

22.25 $^{79}Br^{19}F$ 的原子间隔是 1.76Å. 它的转动惯量是多少?

答案: 7.88×10^{-46}kg·m²

22.26 参见题 22.25, 在 $^{79}Br^{19}F$ 的旋转谱中相邻线的频率间隔是多少:

答案: 21.3GHz

22.27 对于 $n = 0$ 确定由 $l = 2 \to l = 1$ 以及由 $l = 1 \to l = 0$ 的分子跃迁中放出的光子的波长的比值.

答案: 1/2

22.28 在 $^{11}B^{16}O$ 从跃迁 $l = 0 \to l = 1$ 以及 $l = 1 \to l = 2$ 中放出的光子的能量差是 4.46×10^{-4}eV. BO 的原子间隔是多少?

答案: 1.20Å

22.29 某种分子的旋转谱的波长间隔在可见光范围(5000Å)测出是 3.62Å. 分子的转动惯量是多少?

答案: 3.86×10^{-47}kg·m²

22.30 计算 $^{79}Br^{19}F$($r_0 = 1.76$Å)的前 3 个旋转能级.

答案: 0eV; 8.81×10^{-5}eV; 26.4×10^{-5}eV; 52.8×10^{-5}eV

22.31 参照题 22.30. 在 $^{79}Br^{19}F$ 中产生 $l = 0 \to l = 1$ 以 $l = 1 \to l = 2$ 跃迁的光子波长分别是多少?

答案：1.41cm；0.705cm

22.32 $^{79}Br^{19}F$（$r_0=1.76$Å）的振动能级间隔是多少？（将这里的能级大小与在题22.30中得到的旋转能级大小加以比较.）

答案：2.68×10^{-2}eV

第 23 章　气体运动论

在气体运动论中，利用经典力学规律，用在包含大量粒子系统中，以导出各种热力学关系——特别是理想气体定律.

23.1　气体中的平均值

分析气体中一个重要的量是气体分子速率平方的平均值$(v^2)_{avg}$，其定义如下. 设容器中有一定数目的粒子，其中速度的 x 分量为v_{xi}的分子数为n_i. 在容器中 N 个分子的x 速度分量平方的平均值是

$$(v_x^2)_{avg} = \frac{1}{N}(n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + \cdots + n_i v_{xi}^2 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_i n_i v_{xi}^2 \tag{23.1}$$

这里 $N = \sum_i n_i$. 如果进一步假设在 x－，y－和 z－方向没有差别，我们还可以写下

$$(v_x^2)_{avg} = (v_y^2)_{avg} = (v_z^2)_{avg} = \frac{1}{3}(v^2)_{avg} \tag{23.2}$$

这里$(v^2)_{avg} = (v_x^2)_{avg} + (v_y^2)_{avg} + (v_z^2)_{avg}$是速率平方的平均值. $(v^2)_{avg}$的平方根称为均方根速率

$$v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{avg}} \tag{23.3}$$

量$\frac{1}{2}m(v^2)_{avg} = K_{avg}$是一个分子的平均动能；于是

$$U = N\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{avg}\right] \tag{23.4}$$

是气体的总内部动能.

23.2　理想气体定律

在理想气体中，气体的压力被认为是分子与器壁的完全弹性碰撞产生的. 题 23.1 显示，关于碰撞问题的经典分析如何引导到作用在体积为 V 的容器器壁上的压力p 的表达式，设容器中有 N 个分子，每个分子的质量为 m，则有

$$pV = \frac{2}{3}N\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{avg}\right] \tag{23.5}$$

利用总粒子数 N 与总摩尔数 $\mathscr{R}$ 之间的关系：$N = \mathscr{R}N_0$，这里 N_0 是阿伏伽德罗数，

$$N_0 = 6.023 \times 10^{23}\ 分子 / 摩尔 = 6.023 \times 10^{26}\ \frac{分子}{千摩尔}$$

式(23.5)可以写成

$$pV = \mathscr{R}\left[\frac{3}{2}N_0\left(\frac{1}{2}m(v^2)_{avg}\right)\right]$$

将这个表达式与理想气体方程

$$pV = \mathscr{R}RT \tag{23.6}$$

相比较，我们看到

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{avg} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_0}T = \frac{3}{2}kT \tag{23.7}$$

这里比值 $R/N_0 = 1.38 \times 10^{-23}$J/K $= 8.617 \times 10^{-5}$eV/K 称为玻尔兹曼常数，k. 这表明理想气

的绝对温度 T 是组成气体的分子的平均动能的量度.

但是,假设我们不知道理想气体方程(23.6).于是,为了进一步处理式(23.1),我们必须有能力求出

$$(v^2)_{avg} = \frac{1}{N}\sum_i n_i v_i^2$$

求这种平均值的方法与分布函数有关,我们将在第24,25,和26章处理.

例题详解

23.1 假设气体由点状分子组成,它们与其容器器壁进行完全弹性碰撞,设现在有体积 $V = abc$ 的长方形容器,其中有 N 个完全相同的分子,每个分子的质量为 m,证明作用在器壁上的压力是

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{avg}\right]$$

解 首先考虑一个分子与器壁的碰撞(图23-1).在弹性碰撞中,粒子速度的 x - 分量将从 $+v_x$ 变为 $-v_x$.在粒子的动量的 x - 分量中的相应的改变子是为

$$\Delta p_x = m(-v_x) - mv_x = -2mv_x$$

这个碰撞结果是因为器壁有一个微小的力向左作用到分子上.其反作用(牛顿第三定律)是一个微小的力沿右向作用到器壁上,即压力.

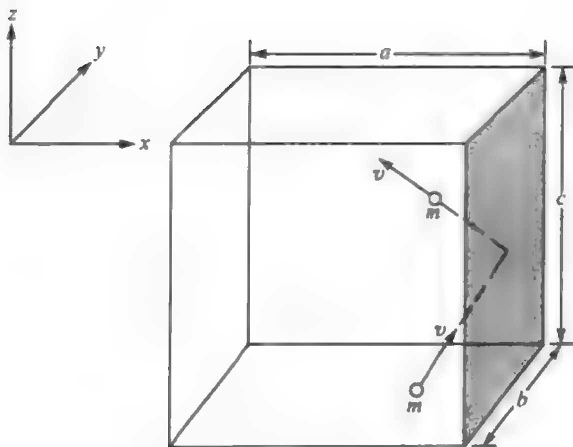


图 23-1

现在设想代替一个粒子是在容器中的 n_i 个粒子,全部具有 x 速度分量 v_{xi}.在小时间区间内,在面积 $A = bc$ 的器壁上将受到在器壁左方的小体积 $A(v_{xi}\mathrm{d}t)$ 内其 x 速度分量为 $+v_{xi}$ 的全体分子所撞击.于是在时间 $\mathrm{d}t$ 内的碰撞数是

$$\left(\frac{n_i}{V}\right)A(v_x\mathrm{d}t)$$

作为碰撞的结果,总 x 方向动量的改变 $\mathrm{d}p_{xi}$ 是

总的动量改变 = (每一个粒子的动量改变) × (撞到壁上的粒子数)

$$\mathrm{d}p_{xi} = (-2mv_{xi})\left[\frac{n_i}{V}A(v_{xi}\mathrm{d}t)\right] = -\frac{2n_i mAv_{xi}^2\mathrm{d}t}{V}$$

所以由牛顿第二定律,作用到粒子上的净力是

$$F_{xi} = \frac{\mathrm{d}p_{xi}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2n_i mAv_{xi}^2}{V}$$

而作用在器壁的力是 $-F_{xi}$.

在上面的讨论中我们略去了在粒子间的任何碰撞效应.时间区间 $\mathrm{d}t$ 可以选得足够小,使得碰撞数可以略去.又,我们即将看到,在处于平衡态的实际气体中,碰撞实际上不是问题,因为,从平均上

说，因碰撞而改变速度的粒子将被另一个粒子所取代，后者因为碰撞的结果获得了第一个粒子的速度.

在气体中的全部 N 个粒子的 x 速度分量不会完全相同. 而是在全体分子中的 x 速度分量有个铺展或有个分布. 于是为了找到作用在面积 A 上的总力，我们必须将各组的贡献总加起来，得到

$$F_x = \sum_i{}'(-F_{xi}) = \frac{2mA}{V}\sum_i{}' n_i v_{xi}^2$$
$$= \frac{2mA}{V}\frac{1}{2}\sum_i n_i v_{xi}^2 = \frac{mA}{V}\sum_i n_i v_{xi}^2$$
$$= \frac{mA}{V}[N(v_x^2)_{avg}] = \frac{NmA(v^2)_{avg}}{3V}$$

这里我们利用了式(23.2)和(23.3). 在上面的推导中我们利用了 $\sum_i{}' n_i v_{xi}^2 = \frac{1}{2}\sum_i n_i v_{xi}^2$，这里 $\sum{}'$ 代表对 $v_{xi} > 0$ 的各组求利，而 $\sum$ 代表对全体分子求和，因为全体分子中刚好有一半是不与所指定的器壁碰撞的所以出现了因子$\frac{1}{2}$. 于是压力 p 是

$$p = \frac{F_x}{A} = \frac{Nm(v^2)_{avg}}{3V} = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{avg}\right]$$

注意 p 的表达式与我们要考虑的特殊的形状的器壁无关.

23.2 在室温(300K)下，分子的平均动能是多少？

解 ☞

$$K_{avg} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\left(8.62\times10^{-5}\frac{eV}{K}\right)(300K) = 3.88\times10^{-2}eV$$

注意这个数值接近于 1/25eV

23.3 如果题 23.2 中的分子是 O_2，计算分子的方均根(rms)速度.

解 ☞

$$K_{avg} = \frac{1}{2}m(v^2)_{avg} = \frac{1}{2}mv_{rms}^2$$
$$v_{rms} = \sqrt{\frac{2K_{avg}}{m}} = \sqrt{\frac{2(3.88\times10^{-2}eV)(1.6\times10^{-19}J/eV)}{(32u)(1.66\times10^{-27}kg/u)}} = 484m/s$$

23.4 大气压定律是在恒温下，离地面高度为 z 处的气压 p 与地面处的气压 p_0 之间的关系是

$$p = p_0 e^{-mgz/kT} \tag{1}$$

这里 m 是分子的平均质量. 证明可从理想气体定律导出这个结果.

解 ☞ 考虑一个小的气体体积，$dV = Adz$，见图 23-2. 因为这个处于平衡状态，它的重量，$\rho g dV$，必须等于两水平面的压力差：

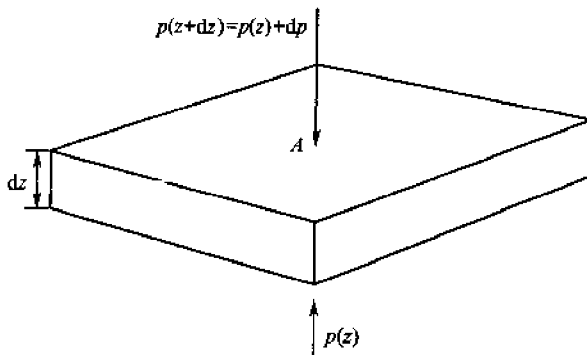


图 23-2

$$\rho g dV = [p(z) - p(z+dz)]A$$
$$\rho g A dz = -A dp$$

$$dp = -\rho g dz$$

从理想气体定律，$pV = \mathscr{R}RT = NkT$，我们有密度：

$$\rho = \frac{Nm}{V} = \frac{mp}{kT}$$

从而，

$$dp = -\frac{mp}{kT}g dz \quad 或 \quad \frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT}dz$$

积分并且应用边界条件 $p(0) = p_0$，我们得到式(1).

23.5 分子的平均自由程 L 是两个碰撞之间穿过的距离.如果分子的直径为 4Å，估计在标准条件下的气体中分子的平均自由程.

解 ☞ 考虑一个半径为 r 的球形分子，并且假定气体中其他分子全部保持静止.该分子将与其中心与自身中心相距在 $2r = d$ 之内的全部其他分子相碰撞.于是在时间 t 之后，它将与截面为 πd^2 而长度为 ut 的折线形柱体中所有分子相碰撞.因此，碰撞数是

$$C = n\pi d^2 ut$$

这里 n 是单位体积的分子数.总的穿行距离除以碰撞数就是两个碰撞间的平均距离：

$$L = \frac{ut}{C} = \frac{1}{n\pi d^2}$$

在标准状态下 1kmol 理想气体占有 22.4m^3，所以

$$n = \frac{6.023 \times 10^{26}\ 分子/\text{kmol}}{22.4\text{m}^3/\text{kmol}} = 2.69 \times 10^{25}\text{m}^{-3}$$

并且

$$L = \frac{1}{(2.69 \times 10^{25}\text{m}^{-3})\pi(4 \times 10^{-10}\text{m})^2} = 7.40 \times 10^{-8}\text{m} = 740\text{Å}$$

上面关于 L 的计算是粗糙的.一个严格的处理包含麦克斯韦-玻尔兹曼分布在内(第 25 章)，有关系

$$L = \frac{0.707}{n\pi d^2}$$

23.6 一个悬浮在液体中的粒子由不规则的随机力作用.假定随机力的作用时间比观察的时间区间 t 要小得多，并且每一次作用到粒子的力都使得它移动一个平均距离 L 但方向是随机的.(即所谓经典的随机步情况.)证明在时间区间 t 内粒子的绝对位移平方的平均值正比于 t.

解 ☞ 在 N 次相互作用之后，我们可以记

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{X}_{N-1} + \mathbf{L}$$

这里 $\mathbf{X}_N$ 是在 N 次相互作用之后的位置矢量.取 $\mathbf{X}_N$ 和自身的点乘，我们有

$$\mathbf{X}_N \cdot \mathbf{X}_N = X_N^2 = X_{N-1}^2 + L^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_{N-1}$$

如果将 X_N^2 的表达式对各种可能情况平均*；而项

$$2\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_{N-1} = 2LX_N\cos\theta$$

考虑到 $\mathbf{L}$ 相对于 $\mathbf{X}_{N-1}$ 的等概率取向而平均值为零.于是

$$(X_N^2)_{\text{avg}} = (X_{N-1}^2)_{\text{avg}} + L^2$$

再考虑到出发点 $(X_0^2)_{\text{avg}} = 0$，有

$$(X_N^2)_{\text{avg}} = NL^2 = \alpha t$$

量 $(X^2)_{\text{avg}}$ 实验上靠多次观察长为 t 的时间区间下的单个悬浮粒子(图 23-3)得到或者，等价地，在单个长为 t 的时间区间观察多个悬浮粒子而得到.

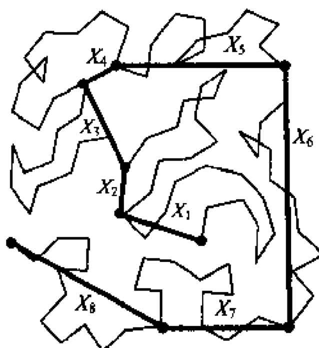


图 23-3

23.7 设题 23.5 中分子有平均速率 454m/s 并且每次在经历一个碰撞之前随机地移动过了一个平均自由程距离.在 10 秒钟之后它的均方根距离是多少？

* 原文是"对 $\mathbf{L}$ 的各种可能方向平均"，不确切，因为平均值 $(X_N^2)_{\text{avg}}$ 是对整个过程而言.——译者注

解 ☞ 从平均自由程的定义，碰撞数 N 等于在时间 t 传播过的距离除以平均自由程 L：$N = vt/L$. 将它代进题 23.6 的结果中，我们得到

$$X_{rms} = N^{1/2}L = \sqrt{vtL} = \sqrt{(454\text{m/s})(10\text{s})(7.40\times 10^{-8}\text{m})} = 1.83\times 10^{-2}\text{m} = 1.83\text{cm}$$

23.8 当悬浮在液体中的粒子经受了组成液体的分子的随机冲击而运动时出现了布朗运动. 从牛顿定律出发，证明在时间 t 之后粒子的平均平方位移具有形式

$$(X^2)_{avg} = \frac{6kT}{\mu}t$$

这里 μ 是液体作用在粒子上的粘性系数.

解 ☞ 考虑一维运动. 在其他力之外，粒子还受到一个粘性阻力，它正比于粒子的速度：$F_{vis} = -\mu(dx/dt)$. 量 μ 被视作是一个给定数，因为它可以直接测量(例如，观察在一个已知外力作用下粒子的最终速度).

设在粘性阻力之外，粒子还受有随机涨落外力 F_r. 从牛顿第二定律我们于是得到(略去粒子上的重力)

$$F_r - \mu\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

为了求出 $(x^2)_{avg}$，我们处理如下：首先将上述方程乘以 x 并且求平均，得到

$$(xF_r)_{avg} = m\left(x\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{avg} + \mu\left(x\frac{dx}{dt}\right)_{avg} \tag{1}$$

现在 F_r 是完全随机的，它与粒子位置 x 不相关连，而全部 F_r 的数值中出现正值和负值的机会相等，所以 x 和 F_r 相乘的平均值为零；$(xF_r)_{avg} = 0$. 此外，从等式

$$x\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

有

$$\left(x\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{avg} = \left[\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right)\right]_{avg} - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]_{avg}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right)_{avg} - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]_{avg}$$

理由是不对时间求平均，但对 F_r 的随机分布求平均. 将这个结果代进式(1)，我们有

$$0 = m\frac{d}{dt}\left[\left(x\frac{dx}{dt}\right)_{avg}\right] - m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]_{avg} + \mu\left(x\frac{dx}{dt}\right)_{avg} \tag{2}$$

利用式(23.7)，这个表达式的第二项可以记为

$$m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]_{avg} = m(v_x^2)_{avg} = \frac{1}{3}m(v^2)_{avg}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{avg}\right] = kT$$

从而式(2)成为

$$kT = m\frac{d}{dt}\left[\left(x\frac{dx}{dt}\right)_{avg}\right] + \mu\left(x\frac{dx}{dt}\right)_{avg} \tag{3}$$

如果定义

$$f = \left(x\frac{dx}{dt}\right)_{avg}$$

于是从式(3)得到 f 的微分方程：

$$m\frac{df}{dt} + \mu f = kT \tag{4}$$

可以直接代入验证，式(4)的解是

$$f = \frac{kT}{\mu} + Ae^{-\frac{\mu}{m}t} \tag{5}$$

对于在布朗运动实验中用的小质量质点，量 μ/m 是 10^4s^{-1} 数量级，所以式(5)中的指数项很快衰减消失. 如果假定这个项本质上是零，我们有

$$f = \left(x\frac{dx}{dt}\right)_{avg} = \frac{kT}{\mu}$$

这个表达式可以重新写成下述形式：

$$\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{avg}}=\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{avg}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(x^2)_{\mathrm{avg}}\right]=\frac{kT}{\mu}$$

所以，设 $t=0$ 时 $(x^2)_{\mathrm{avg}}=0$，有

$$(x^2)_{\mathrm{avg}}=\frac{2kT}{\mu}t$$

最后，在三维情况，由于

$$(x^2)_{\mathrm{avg}}=(y^2)_{\mathrm{avg}}=(z^2)_{\mathrm{avg}}=\frac{1}{3}(X^2)_{\mathrm{avg}}$$

得到

$$(X^2)_{\mathrm{avg}}=\frac{6kT}{\mu}t$$

这个结果与题23.6得到的表达式相同，令 $\alpha=\dfrac{6kT}{\mu}$.

因为 μ 是已知的，在固定的时间区间 t 和温度 T 之下测定 $(X^2)_{\mathrm{avg}}$ 可以确定玻尔兹曼常数 k. 皮兰(J. Perrin)首先利用布朗运动的研究来确定阿伏伽德罗数 N_0 的值，这里 $N_0=R/k$.

23.9 两个相同的容器 A 和 B 装有同样的气体并且有同样的压力，但 B 容器中分子的方均根速率 v_B 大于 A 容器中分子的方均根速率 v_A. 现在将两容器之间的阀门打开一个短时间. 从运动论看来发生了什么.

解 ☞ 粗看一下人们可能认为既然压力相等，打开阀门不会改变任何情况. 但是这种想法是不正确的. 单位时间与器壁的碰撞数 N 正比于单位时间通过所打开的阀的粒子数，而由题23.1，它也正比于乘积 nv，这里 n 是单位体积的粒子数. 于是

$$\frac{\dot{N}_A}{\dot{N}_B}=\frac{n_Av_A}{n_Bv_B}$$

$p_A=p_B$，而(23.5)给出 $n_Av_A^2=n_Bv_B^2$；从而

$$\frac{\dot{N}_A}{\dot{N}_B}=\frac{v_B}{v_A}>1$$

开始时从 A 向 B 移动的粒子比起从 B 向 A 移动的粒子要多. 此外，通过阀门的能量流是

$$\dot{E}\propto\dot{N}\times(\text{单位粒子的平均能量})=\dot{N}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

所以，再一次利用式(23.5)，

$$\frac{\dot{E}_B}{\dot{E}_A}=\frac{\dot{N}_B\dfrac{1}{2}(mv^2)_B}{\dot{N}_A\dfrac{1}{2}(mv^2)_A}=\frac{n_Bv_B}{n_Av_A}\frac{n_A}{n_B}=\frac{v_B}{v_A}>1$$

在开始时能量从容器 B 传向容器 A.

相应地，在初始条件下系统的质量或能量都不在平衡态. 为了得到平衡情况，要有 $\dot{N}_A=\dot{N}_B$ 和 $\dot{E}_A=\dot{E}_B$，其中两个均方根速率必须相等，$v_A=v_B$. 因为温度必须正比于方均根速率平方，看来对于平衡状态这两个气体系统的温度必须相等.

23.10 参照题23.9. 假设，代替有一个阀门，这两个容器以一堵壁隔开，它虽然只能移动有限的距离，但可以无摩擦地在两室之间振动. 讨论在问题23.9所给的初始条件下有什么情况发生.

解 ☞ 在初始时刻

$$\frac{\dot{E}_B}{\dot{E}_A}=\frac{v_B}{v_A}>1$$

这个情况表明这个壁在 B 侧所受到的撞击比起 A 侧来更为剧烈一些. * 作为一个结果，此壁来回振动，其方式是在 B 边的分子损失能量，而 A 边的分子增加能量. 在 $\dot{E}_B=\dot{E}_A$ 时达到平衡，而壁的机

* 本题这一句及下面的解释都原文照译，但文中所述的内容欠妥. 按照热学，可作如下讨论：①如果壁是绝热壁，则壁静止不动，保持力学平衡，而两室气体温度不等，$T_B>T_A$. ②如果隔离壁是导热壁，则壁将 B 室气体的热能传给 A 室气体，同时壁向 B 室移动，最终使两室达到热学平衡和力学平衡. ——译者注

械运动是使得从 B 传递到 A 的能量比起从 A 传到 B 的能量要多. 这个由壁的能量机械传递相当于两个容器之间的"热流". 当净热流不存在时就达到平衡, 这样的情况发生在 A 和 B 具有同样的温度(或方均根速度)时.

补充习题

23.11 O_2, CO_2, F_2 和 He 处于同一个温度下. 求出它们的均方根速率与在同样温度下的 H_2 的均方根速率之比.

答案:0.354;0.267;0.324;0.707

23.12 从动能理论证明 $(v_{rms})^2 = 3p/\rho$, 这里 ρ 是理想气体密度.

23.13 设 w 是有平均值的物理量. 从等式

$$(w - w_{avg})^2 = w^2 - 2ww_{avg} + (w_{avg})^2$$

证明

$$w_{rms} \geqslant w_{avg}$$

23.14 一个客户开了一个银行户头, 开始时的余额为零. 在一年内每个早晨他都掷硬币一次; 如果结果是正面, 他存进 1 元; 如果是反面, 他取出 1 元(或者从银行借出 1 元.)问: (a)最终余额的绝对极限是多少? (b)最终余额的期望值是多少? (c)最终余额的均方根期望值(方差)是多少?

答案: (a) ±365 元; (b)0 元; (c) ±19.10 元(译者注 $\sqrt{365} = 19.10$)

23.15 设地球大气有常值温度 273K 而大气分子的平均质量为 48.5×10^{-27}kg. 确定压力是地表一半地点离地表的高度.

答案:5.49km

23.16 设题 23.5 的分子平均速率是 454m/s, 问每秒钟分子的平均碰撞数是多少?

答案: 6.14×10^9 碰撞/s.

第 24 章　分布函数

在第 23 章得到, N 个分子,每个分子的质量为 m 的理想气体,其压力与体积的关系是

$$pV = \frac{2}{3}N\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{avg}}\right]$$

这里速度平方的平均值是

$$(v^2)_{\text{avg}} = \frac{1}{N}\sum_i v_i^2 n_i \tag{24.1}$$

在本章,我们讨论计算物理量平均值的方法.很多地方,为了具体,我们只处理特殊的量 v^2,但所用的方法确有一般性.

24.1　离散分布函数

为了确定系统中物理量的平均值,我们必须先认定这些量所依赖的基本变量.作为一个例子,我们确定动能的平均值,或者等价地,速率平方的平均值.我们可以取系统中粒子的速率作为能量所依赖的变数.设将 v 的全部范围按长短 Δv 划分,其等距离点为 $v_1, v_2, v_3, \cdots$(图 24-1).因为系统中有 N 个粒子,在平衡条件下,在每个速度区间有一定数目的粒子.设 n_i 是速率在v_i 和$v_i + \Delta v = v_{i+1}$之间的粒子数.为了将它图解地表示出来,我们可以相对 v 点出n_i.但由于即将说明的原因,我们代之以用 Δv 除过的 n_i,并且画出比值 $f_i = n_i/\Delta v$ 以得出图24-1所示的直方图.因为纵坐标 f_i 是单位速率的粒子数,所以粒子数 n_i 等第 i 个长方条的面积:

$$n_i = f_i \Delta v \tag{24.2}$$

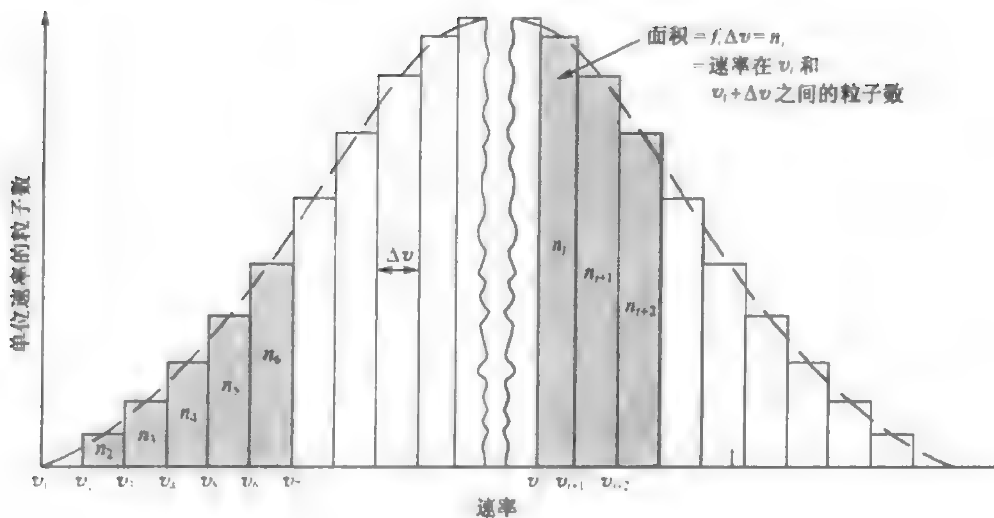


图 24-1

因为粒子的总数 N 必须等于全部 n_i 之和,我们有规范化条件:全部长方条的面积总和,即直方图下总面积,就是总粒子数:

$$N = \sum_i f_i \Delta v \tag{24.3}$$

更一般些,速率在 v_α 和 v_β 之间的粒子数恰好是在这两个值之间的直方图的面积.

f_i 的直方图称作是粒子速率的分布函数.(在统计工作中,数目 $f_i\Delta v$ 称为频率,因面人们称之为频率分布.)用分布函数,(24.1)可以记作

$$(v^2)_{avg} = \frac{1}{N}\sum_i v_i^2 f_i \Delta v \tag{24.4}$$

在类似的方式中，与速率有关的任何量的平均值可以用速率分布函数 f_i 写出．

要注意到像式(24.4)那样的求和一般无须从 1 扩展到 N．求和依赖于所挑选的区间数而不是粒子数．

24.2　连续分布函数

在很多感兴趣的情况中，总粒子数 N 是非常大的，并且在单位时间内有很多次碰撞，所以速率可以当作是连续变化的．在这种情况下，我们让速率区间 Δv 趋于零；$\Delta v \to dv$．于是我们得到如图 24-1 中的图形但有更多的长方条，每一条更窄，这些长方条所搭成的图形仍旧与所示的虚线相一致．速率在 v 到 $v+dv$ 之间的粒子数 dn 等于一个长方条的无穷小面积，并且从式(24.2)推广得出关系

$$dn = f(v)dv$$

这里 $f(v)$ 是连续分布函数，见图 24-1 虚线曲线所示．

在这个极限下，各种离散的求和变成了定积分．例如，规一化条件(24.3)成为

$$N = \int_{v_{min}}^{v_{max}} f(v)dv \tag{24.5}$$

面速率平方平均值的表达式(24.4)成为

$$(v^2)_{avg} = \frac{1}{N}\int_{v_{min}}^{v_{max}} v^2 f(v)dv \tag{24.6}$$

24.3　基本分布函数和态密度

在经典物理和量子物理中都有基本分布函数，其他感兴趣的分布函数可以由它导出．基本分布函数是指，按平均值来说，系统中的粒子在系统的可利用的态中如何分布．换句话说，基本分布函数，对于每个态来说，是描述粒子在这个态中能被找到的概率．

粒子态由能够完全描述一个粒子运动所需要的最小变数集合所定义．作为一个例子，经典地说，对于弱相互作用粒子，其粒子态可以由它的三个速度分量(v_x, v_y, v_z)所完全确定，或者等价地，因为 $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$，由三个动量分量(p_x, p_y, p_z)所完全确定．

服从古典规律的系统基本分布函数称为麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数 F_{MB}（我们以大写字母表示基本分布函数．）麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数的定义是指

$$dn_{\mathbf{v}} = F_{MB}dv_x dv_y dv_z \tag{24.7}$$

为速度分量在 v_x 和 v_x+dv_x，v_y 和 v_y+dv_y，以及 v_z 和 v_z+dv_z 之间的平均粒子数．

在下一章将看到，经典和量子力学的基本分布函数中有一个性质是共同的——它们只与态的能量有关而并不依赖定义态的量．由子这个性质，有可能，例如，将按能量的粒子分布记为形式

$$dn_E = Fg(E)dE \tag{24.8}$$

在这个表达式中，基本分布函数 F 是统计因子，它描述在给定的能量 E 态中找到一个粒子的概率，而 $g(E)$ 称为态密度(相对于能量)．量 $g(E)dE$ 给出能量在 E 和 $E+dE$ 之间的状态数 dS_E：

$$dS_E = g(E)dE \tag{24.9}$$

对于弱作用系统，粒子的能量等于它的动能，因此

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{24.10}$$

相应地，有许多不同的(v_x, v_y, v_z)态具有相同的能量．

更一般地，如果动力学量 q 只与能量有关，值在 q 和 $q+dq$ 之间的粒子数总可以记成形

式

$$dn_q = Fg(q)dq \tag{24.11}$$

其中包含一个统计因子 F,它保留在给定统计中的同样形式(例如在经典统计中 $F=F_{MB}$),和一个态密度因子 $g(q)$,它与所考虑的特殊物理性质有关.量 q 可以是,例如,速率,能量[如在式(24.8)中],或动量的大小.

例题详解

24.1 在某个时刻,在 1 摩尔气体中,速率在 495m/s 到 505m/s 之间的有 4782 个分子.在速率为 500m/s 处的速率分布函数值是多少?

解 ☞ 速率分布函数 f_v 定义为

$$dn_v = f_v dv \quad 或 \quad f_v = \frac{dn_v}{dv} \approx \frac{\Delta n_v}{\Delta v}$$

从数据,$\Delta n_v = 4782$ 分子,而 $\Delta v = 505\text{m/s} - 495\text{m/s} = 10\text{m/s}$,所以

$$f_v = f_{500\text{m/s}} = \frac{4782\ 分子}{10\text{m/s}} = 478.2\ \frac{分子}{\text{m/s}}$$

24.2 在一个指定时间在某个系统中粒子的速率见表 24-1.从 0m/s 开始,取速率区间为 20m/s,标出速率分布函数.

表 24-1

速率区间 m/s	0~5	5~10	10~15	15~20	20~25	25~30	30~35	35~40
粒子数目	1	0	0	1	3	0	2	1
速率	40~45	45~50	50~55	55~60	60~65	65~70	70~75	75~80
数目	5	1	6	4	2	8	0	2
速率	80~85	85~90	90~95	95~100	超过 100			
数目	3	0	0	1	0			

解 ☞ 对于有限速度区间,速度分布函数定义为

$$f_v = \frac{\Delta n_v}{\Delta v}$$

这里 Δn_v 是速率在 v 到 $v+\Delta v$ 区间内的粒子数.从已给的数据我们算出了 f_v 的值,见表 24-2,图 24-2.在图 24-2 中的两条虚线是对直方图的连续近似.

表 24-2

Δv, m/s	0~20	20~40	40~60	60~80	80~100	超过 100
Δn_v,粒子	2	6	16	12	4	0
f_v,粒子/(m/s)	0.1	0.3	0.8	0.6	0.2	0.0

24.3 参照图 24-2.从(a)直方图,(b)三角形近似中求出系统的粒子数.

解 ☞ (a)直方图的面积是($\Delta v = 20\text{m/s} = 常数$)

$$N = \sum_i f_{vi}\Delta v = \left(0.1\frac{粒子}{\text{m/s}} + 0.3\frac{粒子}{\text{m/s}} + 0.8\frac{粒子}{\text{m/s}} + 0.6\frac{粒子}{\text{m/s}} + 0.2\frac{粒子}{\text{m/s}}\right)(20\text{m/s}) = 40\ 粒子$$

(b)三角形的面积是

$$N = \frac{1}{2}[(100-10)\text{m/s}]\left(0.8\frac{粒子}{\text{m/s}}\right) = 36\ 粒子$$

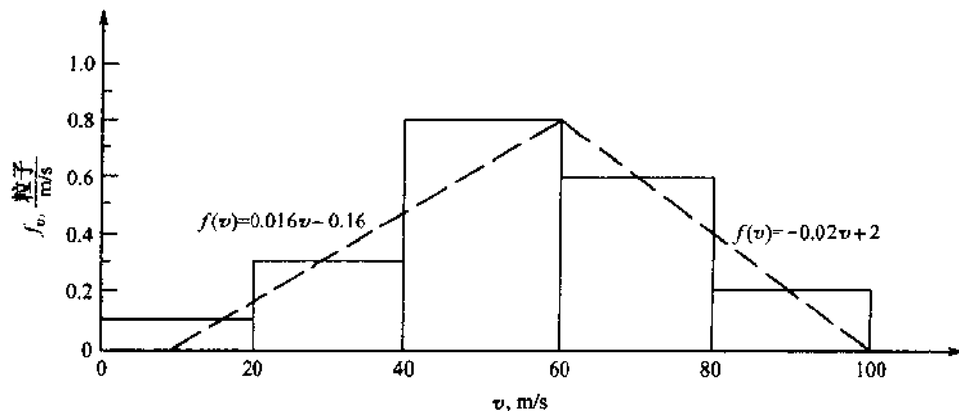


图 24-2

24.4　参照图 24-2.(a)从直方图,(b)从三角形近似求出粒子的平均速率.

解　(a)利用题 24.3(a)找到的数值 $N=40$ 粒子,

$$v_{avg}=\frac{1}{N}\sum_i v_i f_i \Delta v^{*}$$

$$=\frac{1}{40\text{ 粒子}}\left[(10\text{m/s})\left(0.1\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)+(30\text{m/s})\left(0.3\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)+50\text{m/s}\left(0.8\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)\right.$$

$$\left.+(70\text{m/s})\left(0.6\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)+(90\text{m/s})\left(0.2\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)\right](20\text{m/s})=55\text{m/s}$$

(b)利用题 24.3(b)找到的数值 $N=36$ 粒子,

$$v_{avg}=\frac{1}{N}\int_0^{\infty}vf(v)\mathrm{d}v=\frac{1}{36}\int_0^{60}v(0.016v-0.16)\mathrm{d}v+\frac{1}{36}\int_{60}^{100}v(-0.02v+2)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{36}\left[0.016\frac{v^3}{3}-0.16\frac{v^2}{2}\right]_{10}^{60}+\frac{1}{36}\left[-0.02\frac{v^3}{3}+2\frac{v^2}{2}\right]_{60}^{100}$$

$$=56.7\text{m/s}$$

24.5　参照图 24-2.(a)从直方图,(b)从三角形近似求出粒子的方均根速率 v_{rms}.

解　由定义,$v_{rms}=\sqrt{(v^2)_{avg}}$.从题 24.3(a),利用 $N=40$ 粒子.

$$(v^2)_{avg}=\frac{1}{N}\sum_i v_i^2 f_i\Delta v$$

$$=\frac{1}{40\text{ 粒子}}\left[(10\text{m/s})^2\left(0.1\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)+(30\text{m/s})^2\left(0.3\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)+(50\text{m/s})^2\left(0.8\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)\right.$$

$$\left.+(70\text{m/s})^2\left(0.6\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)+(90\text{m/s})^2\left(0.2\frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}\right)\right](20\text{m/s})=3420(\text{m/s})^2$$

因此 $v_{rms}=58.5$m/s.注意 v_{rms}比在题 24.4(a)算得的 v_{avg}要大.这是题 23.13 中所要求的.

(b)从题 24.3(b),$N=36$ 粒子

$$(v^2)_{avg}=\frac{1}{N}\int_0^{\infty}v^2f(v)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{36}\int_{10}^{60}v^2(0.016v-0.16)\mathrm{d}v+\frac{1}{36}\int_{60}^{100}v^2(-0.02v+2)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{36}\left[0.016\frac{v^4}{4}-0.16\frac{v^3}{3}\right]_{10}^{60}+\left[-0.02\frac{v^4}{4}+2\frac{v^3}{3}\right]_{60}^{100}$$

$$=3550(\text{m/s})^2$$

因此 $v_{rms}=59.6$m/s.

24.6　求出在速率区间 v 到 $v+\mathrm{d}v$ 内的经典状态数,并且据此证明状态密度 $g(v)$具有形式 $g(v)\propto v^2$.

解　为了确定状态和速率之间的关系,方便的是利用三个轴是 v_x, v_y 和 v_z 的坐标系统.像这样的坐标系统,其中的速度分量分解在三个轴上,称为"速度空间".一个粒子速度的指定值(v_x, v_y, v_z)

于是成为速度空间的一个点．因为每一个集合(v_x, v_y, v_z)定义了一个粒子状态，可以看到在速度空间中每一个点对应着一个粒子的某种态．现在考虑在速度空间中的无穷小"体积"元 $dv_v = dv_x dv_y dv_z$，如图 24-3 所示．虽然在体积元的精确点数不能确定(它依赖于"点"的定义)，但点数与体积元的大小成正比．因为对于每一个点(v_x, v_y, v_z)对应着一个粒子态，由体积元确定的态数 dS_v 还与体积元的大小成正比，所以我们可以记

$$dS_v = CdV_v = Cdv_x dv_y dv_z$$

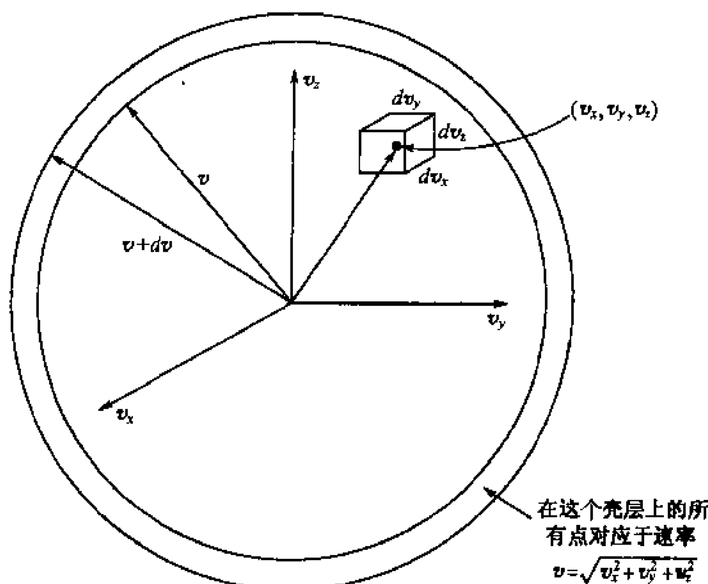


图 24-3

在速度空间中，$v_x^2+v_y^2+v_z^2=v^2=$常量是一个"半径"v 的"球面"，所以在球面上的所有点对应的粒子都有相同的速率 v．如果我们现在考虑速率在 v 到 $v+dv$ 之间的粒子，在对应的速度空间中的相应点将位于由半径为 v 及 $v+dv$ 球面所限制的球壳之内，球壳的体积是

$$dV = 4\pi v^2 dv$$

与在这个体积元中的速率相对应的状态的数目 dS_v 将正比于这个体积元素的大小，所以

$$dS_v = CdV = C4\pi v^2 dv$$

状态密度由 $dS_v = g(v)dv$ 定义，所以

$$g(v) = C4\pi v^2$$

24.7　求出在 E 和 $E+dE$ 之间的能量区间的经典状态数 $dS_E = g(E)dE$，并且进一步证明态密度 $g(E)$ 具有形式 $g(E) \propto E^{1/2}$.

解　因为 $E=\frac{1}{2}mv^2$，速率区间 dv 与能量区间 dE 有关系

$$dE = mvdv \quad 或 \quad \frac{dE}{mv} = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}$$

另外，能量区间 dE 内的状态数必须等于对应的速率区间 dv 内的状态数，所以，从题 24.6,

$$dS_E = dS_v = C4\pi v^2 dv = C4\pi\left(\frac{2E}{m}\right)\left(\frac{dE}{\sqrt{2mE}}\right) = \left(\frac{4\pi C}{m^{3/2}}\sqrt{2}\right)E^{1/2}dE$$

$$= DE^{1/2}dE,\ D = \frac{4\pi C}{m^{3/2}}\sqrt{2} = 常数$$

于是在 E 和 $E+dE$ 能量之间的态密度是 $g(E) = DE^{1/2}$.

补 充 习 题

24.8　如果在题 24.2 所描述的系统的每一个粒子有质量 0.002kg，利用直方图分布，求出(a)每个粒子的平均能量(b)系统的总能量．

答案:(a)3.42J;(b)136.8J

24.9 重复题 24.8,利用图 24-2 中的三角形近似.

答案:(a)3.55J;(b)127.8J

24.10 利用图 24-2 的三角形近似,求出速率在 20m/s 到 80m/s 间的粒子数.将这个答案与从表 24-2 得到的答案相比较.

答案:31.2 粒子;34 粒子

24.11 某个粒子系统的速率分布函数是

$$f(v) = v(500 - v)\ \text{粒子}/(\text{m/s})$$

这里 v 的变化范围在 0m/s 和 500m/s 之间.每个粒子的质量是 2×10^{-12}kg.计算(a)粒子平均速率;(b)每个粒子的平均能量;(c)系统的总能量.

答案:(a)250m/s;(b)7.51×10^{-8}J;(c)1.56J

24.12 从速率 $v=0$m/s 到 $v=10^3$m/s,粒子集合的速率分布函数是

$$f(v) = (5\times10^{20})\sin\frac{\pi v}{10^3}\ \frac{\text{粒子}}{\text{m/s}}$$

而当速率大子 10^3m/s 时 $f(v)=0$.求出该系统的粒子数.

答案:3.18×10^{23}

24.13 题 24.12 的粒子的平均速率是多少?

答案:500m/s

24.14 题 24.12 中的粒子的方均根速率是多少?

答案:545m/s

24.15 如果在 p 到 $p+\mathrm{d}p$ 的动量区间内的经典状态数是 $\mathrm{d}S_p=g(p)\mathrm{d}p$,求出态密度 $g(p)$的形式.

答案:$g(p)=Kp^2$(K = 常数)

第 25 章　经典统计：麦克斯韦-玻尔兹曼分布

对于服从古典规律的粒子系统，速率分量在 $v_x \to v_x + \mathrm{d}v_x$, $v_y \to v_y + \mathrm{d}v_y$, $v_z \to v_z + \mathrm{d}v_z$ 之间的平均粒子数 $\mathrm{d}n_{\mathbf{v}}$ 是

$$\mathrm{d}n_{\mathbf{v}} = F_{MB}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z \tag{25.1}$$

麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数 F_{MB} 正比于粒子出现于状态 (v_x, v_y, v_z) 时的概率密度，它具有形式

$$F_{MB} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-E/kT} \tag{25.2}$$

（推导在题 25.13 到 25.17 给出）. 这里，N 是粒子总数，m 是每个粒子的质量，k 是玻尔兹曼常数，和 T 是绝对温度.

如同 24.3 节的讨论，如果参量 q 只与能量有关，参量在 q 和 $q + \mathrm{d}q$ 之间的粒子数是

$$\mathrm{d}n_q = F_{MB}g(q)\mathrm{d}q \tag{25.3}$$

这里 $g(q)$ 是状态密度. 当 $q = v$（见题 24.7 和 25.2），我们有

$$g(v) = C4\pi v^2 = 4\pi v^2 \tag{25.4}$$

而对于 $v = E$，我们有（见题 24.7 和 25.2）

$$g(E) = DE^{1/2} = \left(\frac{2^{5/2}\pi}{m^{3/2}}\right)E^{1/2} \tag{25.5}$$

积分

$$I_n(\alpha) \equiv \int_0^\infty u^n \mathrm{e}^{-\alpha u^2}\mathrm{d}u \qquad (\alpha > 0)$$

经常在麦克斯韦-玻尔兹曼分布的应用中出现. 当整数 n 较小时，其积分值见表 25-1.

表 25-1

n	0	1	2	3	4	5
$I_n(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{\alpha^3}$

例 题 详 解

25.1 证明对于 N 粒子系统来说，麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数(25.2)是规一化的.

解 ☞ 系统中的总粒子数是

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty F_{MB}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$$

这里右方的三重积分是形式为

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-mq^2/2kT}\mathrm{d}q = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-mq^2/2kT}\mathrm{d}q = 2I_0\left(\frac{m}{2kT}\right)$$

的单重积分的三重乘积. 于是，从表 25-1，总粒子数是

$$N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} = N$$

25.2 求出在能量态密度 $g(E) = DE^{1/2}$ 表达式中的常数 D（看问题 24.7）.

解 ☞ 我们有

$$\mathrm{d}n_E = F_{MB}g(E)\mathrm{d}E = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-E/kT}(DE^{1/2})\mathrm{d}E$$

因为总粒子数是 N,

$$N = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} D\int_0^\infty E^{1/2}e^{-E/kT}dE = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} D\left[2I_2\left(\frac{1}{kT}\right)\right] = N\frac{m^{3/2}D}{2^{5/2}\pi}$$

这里将积分变量从 E 改变为 $u=\sqrt{E}$,并且利用了表 25-1.于是

$$D = \frac{2^{5/2}\pi}{m^{3/2}}$$

能量分布函数 f_E 由关系 $dn_E = f_E dE$ 定义.从上面的计算,

$$f_E = F_{MB}g(E) = \frac{2N}{\pi^{1/2}(kT)^{3/2}}E^{1/2}e^{-E/kT}$$

25.3 求出相对于速率的态密度表达式,$g(v) = C4\pi v^2$ 中的常数 C(见题 24.6).

解 ☞ 对于在速率区间 dv 中的粒子数,我们有

$$dn_v = F_{MB}g(v)dv$$

它必须等于对应的能量区间 dE 范围内的粒子数 $dn_E = F_{MB}g(E)dE$.对于 $E=\frac{1}{2}mv^2$,

$$dE = mvdv = \sqrt{2mE}dv$$

从而,

$$F_{MB}g(v)dv = F_{MB}g(E)\sqrt{2mE}dv \quad 或 \quad g(v) = g(E)\sqrt{2mE}$$

因为 $g(v) = C4\pi v^2 = C8\pi E/m$ 和 $g(E) = DE^{1/2}$(题 25.2),

$$C\frac{8\pi E}{m} = D2^{1/2}m^{1/2}E$$

$$C = \frac{m^{3/2}}{2^{5/2}\pi}D = 1$$

速度分布函数 f_v 由 $dn_v = f_v dv$ 定义.从上面的计算,

$$f_v = F_{MB}(4\pi v^2) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-mv^2/2kT}$$

25.4 求出麦克斯韦-玻尔兹曼分布的均方根速率.

解 ☞ 速率平方的平均值是

$$(v^2)_{avg} = \frac{1}{N}\int v^2 dn_v = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 f_v dv$$

将问题 25.3 的 f_v 代入,我们得到

$$(v^2)_{avg} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}I_4\left(\frac{m}{2kT}\right) = \frac{3kT}{m}$$

因此

$$v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{avg}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

与动能理论的结果相同[见式(23.7)].

25.5 在麦克斯韦-玻尔兹曼分布下,求出最概然速率 v_p 与均方根速率 v_{rms}之比.

解 ☞ 在麦克斯韦-玻尔兹曼分布中的最概然速率满足 $f_v = 4\pi v^2 F_{MB}$取得极大的条件.将题 25.3 中得到的表达式微分,

$$\frac{df_v}{dv} = 0 = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/2kT}v\left[2 - v^2\left(\frac{m}{kT}\right)\right]$$

根 $v=0$ 和 $v=\infty$时是极小值;从而 $v_p = \sqrt{2kT/m}$,而利用题 25.4 的结果,

$$\frac{v_p}{v_{rms}} = \frac{\sqrt{2kT/m}}{\sqrt{3kT/m}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$$

25.6 在很多感兴趣的情况中,一个粒子的总能量可以写成形式

$$E = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2$$

这里 c_i 是常数而 q_i 是位置和/或动量(速度)坐标.现在麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数是

$$F_{MB} = Ae^{-E/kT} = Ae^{-(\Sigma c_i q_i^2)/kT}$$

求出常数 A.

解 归一化条件是

$$N = A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}c_iq_i^2\right)/kT}dq_1dq_2\cdots dq_n$$

$$= A\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c_1q_1^2/kT}dq_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c_2q_2^2/kT}dq_2\right]\cdots\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c_nq_n^2/kT}dq_n\right]$$

$$= A\left[2I_0\left(\frac{c_1}{kT}\right)\right]\left[2I_0\left(\frac{c_2}{kT}\right)\right]\cdots\left[2I_0\left(\frac{c_n}{kT}\right)\right]$$

$$= A\frac{(\pi kT)^{n/2}}{(c_1c_2\cdots c_n)^{1/2}}$$

从而

$$A = N\frac{(c_1c_2\cdots c_n)^{1/2}}{(\pi kT)^{n/2}}$$

注意对于三维速度分布,有 $c_1=c_2=c_3=m/2$,这个结果与式(25.2)的归一化常数相同.

25.7 参照题25.6.证明每个粒子的平均能量等于$\frac{1}{2}kT$ 与 n 相乘,n 是能量表达式中的位置平方项和动量平方项的总数.结果:在能量中每个平方项对每个粒子的平均能量贡献一项$\frac{1}{2}kT$ 称为均分定理.

解 在题25.6中,我们知道

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-E/kT}dq_1dq_2\cdots dq_n = \frac{(\pi kT)^{n/2}}{(c_1c_2\cdots c_n)^{1/2}}$$

将两方对 kT 微分,得到

$$\frac{1}{(kT)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}Ee^{-E/kT}dq_1dq_2\cdots dq_n = \frac{\pi^{n/2}(n/2)(kT)^{n/2-1}}{(c_1c_2\cdots c_n)^{1/2}} = \frac{N}{A}\frac{n/2}{kT}$$

或者移项有

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}E(Ae^{-E/kT})dq_1\cdots dq_n = n\left(\frac{1}{2}kT\right)$$

这里左方是一个粒子的平均能量,因此它就是均分定理.

25.8 一个可自由转动但是不能振动的双原子分子模型是哑铃式的,其对于通过质量的轴的转动惯量近似为零.利用均分定理求出双原子气体的摩尔热容.

解 单个双原子分子的能量是

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{1}{2}I\omega_1^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2$$

在这个表达式中有5个平方项.从均分定理(题25.7),1摩尔气体的能量等于

$$E_{tot} = N_0n\left(\frac{kT}{2}\right) = \frac{5}{2}N_0kT$$

这里 N_0 是阿伏伽德罗数.摩尔比热 C_V 等于

$$C_V = \frac{dE_{tot}}{dT} = \frac{5}{2}N_0k = \frac{5}{2}R$$

其中 R 是理想气体常数.

25.9 如果把晶格当作以弹簧相连的有通常间隔的原子系统,利用均分定理求出摩尔比热.

解 在格点上振动原子的能量是

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{1}{2}(k_xx^2+k_yy^2+k_zz^2)$$

因为这里 cq^2 形式的有6项,由能量均分定理(题25.7),一摩尔有能量

$$E_{tot} = N_0(6)\left(\frac{kT}{2}\right) = 3N_0kT$$

这里 N_0 是阿伏伽德罗常数.摩尔比热由下式给出

$$C_V = \frac{dE_{tot}}{dT} = 3N_0k = 3R$$

这就是杜隆-珀替定律.实验上看到这个定律在高温时是正确的,但在低温时因为量子效应使得它有所改变.量子效应在第 26 章讨论.

25.10 图 25-1 所示的 RLC 高-Q 值调谐线路(R 较小)处在温度 T 上.利用均分定理,估计出由于热涨落而电感中感应出来的电压的均方根值.

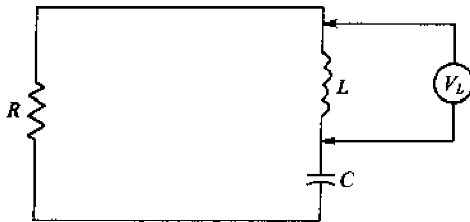


图 25-1

解 ☞ 贮存在电感 L 中的能量是

$$E = \int_0^{t_I} V_L i \, dt = \int_0^I L i \, di = \frac{1}{2} L I^2 \ ^*$$

而由于均分定理(题 25.7),因为在能量表达式有一个平方项,

$$E_{avg} = \frac{1}{2} L (I^2)_{avg} = \frac{1}{2} kT \tag{1}$$

对于高 Q 调谐线路,除去在共振频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

之外,其噪音谱被压低,所以电流以及相应的电压是正弦形的,其角频率为 ω_0.于是电感两端的大小 V_L,与通过它的电流大小 I 有关系

$$V_L = \omega_0 L I$$

从这里得到

$$(V_L^2)_{avg} = (\omega_0 L)^2 (I^2)_{avg} \tag{2}$$

方程(1)和(2)在一起给出

$$(V_L^2)_{avg} = \omega_0^2 LkT \quad \text{或} \quad V_{L\text{rms}} = \omega_0 \sqrt{LkT} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

25.11 在麦克斯韦-玻尔兹曼分布的粒子系统中,求出比值 N_V/N, N 是总粒子数, N_V 是其速率大于 V 的粒子数.

解 ☞ 所要求的比值由下式给出:

$$\frac{N_V}{N} = \frac{1}{N}\int_V^\infty dn_v = \frac{1}{N}\int_V^\infty f_v dv = \frac{1}{N}\int_V^\infty 4\pi v^2 F_{MB} dv$$
$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_V^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

更改积分变量

$$u^2 = \frac{mv^2}{2kT} \qquad du = \sqrt{\frac{m}{2kT}} dv$$

我们得到

$$\frac{N_V}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_U^\infty u^2 e^{-u^2} du \qquad \left(U = \sqrt{\frac{m}{2kT}} V\right)$$

分部积分并且利表 25-1 中 $n = 0$ 的结果,

$$\frac{N_V}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[-\frac{1}{2} u e^{-u^2}\right]_U^\infty + \frac{1}{2}\int_U^\infty e^{-u^2} du\right\}$$

* 第二式的上限原文为 I,但按定积分定义应改为 t_I,这里 t_I 是电感 L 中电流到达 I 的时刻.——译者注

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2}Ue^{-U^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du - \frac{1}{2}\int_0^U e^{-u^2}du\right\}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2}Ue^{-U^2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^U e^{-u^2}du\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}Ue^{-U^2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^U e^{-u^2}du$$

$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}Ue^{-U^2} - \mathrm{erf}U$$

这里第二项可以直接求出,而第三项是 U 的误差函数,可以从标准的表中查得. N_V/N 与 U 的图解关系见图 25-2.

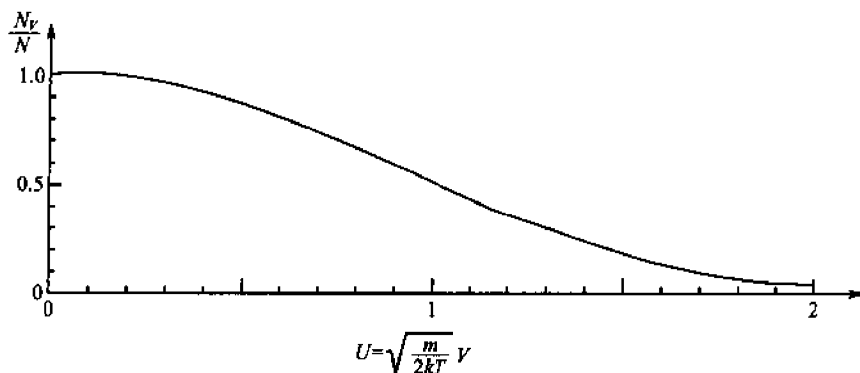


图 25-2

25.12 在麦克斯韦-玻尔兹曼分布下,其速率超过最概然速率 v_p 的粒子所占的百分比是多少?

解 ☞ 从题 25.5,最概然速率是

$$V = v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

它对应于题 25.11 中的 $U=1$. 从图 25-2,我们得到当 $U=1$, $N_V/N=0.57$. 于是速率大于 v_p 的粒子占 57%.

25.13 斯特林公式是指对于大的 n

$$\ln n! \approx n\ln n - n$$

即两方的比趋向于 1*. 当 $n=60$ 时,求出因斯特林公式而引起的误差.

解 ☞ 对于 $n=60$,我们有严格结果

$$\ln n! = \ln(8.321\times10^{81}) = 188.63$$

用斯特令公式,我们有近似结果

$$\ln n! \approx n\ln n - n = 60[(\ln 60) - 1] = 60(4.0943 - 1) = 185.66$$

在这个近似里的百比误差 δ 是

$$\delta = \frac{188.63 - 185.66}{188.63}\times100 = 1.57\%$$

对于 $n=60$,我们看到其误差仅有 1.57%. 对于 n 在 10^{23}(即阿伏伽德罗数量级)量级时,其误差无关紧要.

25.14 将 N 个可区分粒子放进 r 个"单元",使得 n_1 个粒子在第 1 单元, n_2 个粒子在第 2 个单元,…, n_r 个粒子在第 r 单元($\sum n_i = N$),这样的分配方式共有多少种?

解 ☞ 设方式数是 X,并且 X 中的任意一个都是将 N 个粒子排成一直线, n_1 的一组紧接着 n_2 的一组,…,最后接着 n_r 的一组. 如果第一组的 n_1 个元素在组内进行置换,我们将获得这 N 个粒子

---

* 这个说法不准确,因为没有顾及到 n 的数量级. 准确地说是$(n\ln n - \ln n!)/n$ 趋于 1. ——译者注

的 $n_1!$ 种不同的直线排列.以下逐个依次地给出在第 2 组中给出 $n_2!$ 个排列;等等.于是在所选的组合中将出现总数为

$$C = n_1!\,n_2!\cdots n_r!$$

的排列.因此 X 个组合生成 XC 个排列,它们彼此不同,因而必然用尽了 N 个粒子的 $N!$ 种可能的排列.这样,

$$XC = N! \quad 或 \quad X = \frac{N!}{C} = \frac{N!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

25.15 参照题 25.14.在统计力学中,假定任何给定的粒子有占据第 i 个单元的"内禀概率"($\sum g_i = 1$).例如,如果单元是能量区间,在 ΔE_j 中的态数是在 ΔE_i 中态数的两倍,则粒子能量在区间 ΔE_i 的概率的两倍相当于 ΔE_j 中的概率.在这样的假设下,求出获得一个粒子特殊分布($n_1, n_2, \cdots, n_r$)概率的表达式.

解 ☞ 考虑一个填充这些单元的特殊方式,其中,例如说,粒子 $\alpha_1, \beta_1, \cdots$ 填到单元 1;$\alpha_2, \beta_2, \cdots$ 填到单元 2;等等.α_1 填到单元 1 的概率是 g_1;α_1 和 β_1 还有…填到单元 1 的概率是

$$g_1 \times g_1 \times \cdots \times g_1 = g_1^{n_1}$$

而完全填充的概率是

$$g_1^{n_1} g_2^{n_2} \cdots g_r^{n_r}$$

实现上述分布的每一个方式具有这个概率,而由题 25.14,这种实现方式共有

$$\frac{N!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

个.于是我们求得的概率是

$$P_n = \frac{N!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \cdots g_r^{n_r} \tag{1}$$

25.16 参照题 25.15.统计力学假设在各种粒子分布中,具有最大概率的一个对应于系统的平衡态.在系统的粒子数和总能量都是常值的条件下,求出这个最概然分布.

解 ☞ 这个问题是使

$$P_n = \frac{N!}{n_1!\,n_2!\cdots} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \cdots \tag{1}$$

取得最大值(单元数 r 并不重要,但要求它保持固定不变),同时要满足两个约束条件:

固定不变的粒子数: $\sum n_i = N$ (2)

固定的总能量: $\sum E_i n_i = E_{\text{tot}}$ (3)

这里 N 和 E_{tot} 是给定的,能量约束中假定在第 i 个单元中每个有相同的能量 E_i.将 P_n 换成 P_n 的单调递增函数

$$\ln\frac{P_n}{N!} = \sum n_i \ln g_i - \sum \ln n_i!$$

会带来方便.(记住:考虑最大化时 N 是固定不变的).我们进一步假定 N 非常大($\approx 10^{23}$)并且,更加重要的是所有的 n_i 足够大,使得能够使用斯特令公式(问题 25.13).于是,我们记

$$\ln\frac{P_n}{N!} = \sum n_i \ln g_i - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i \tag{4}$$

这里已将最后一项删去,因为,由式(2),它是常数而在最大化时具有等于零的导数.

把 n_i 当作连续变数,在约束条件(2)及(3)下,用拉格朗日乘子法求函数(4)的最大值.就是说,我们构造函数

$$F(n_1, n_2, \cdots; \lambda_1, \lambda_2) = \sum n_i \ln g_i - \sum n_i \ln n_i - \lambda_1\left(\sum n_i - N\right) - \lambda_2\left(\sum E_i n_i - E_{\text{tot}}\right)$$

并且求它对变量 $n_1, n_2, \cdots; \lambda_1, \lambda_2$ 的最大值而无需考虑约束.取 F 的偏导数,我们得到条件

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = \ln g_i - \ln n_i - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 E_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

以及从 λ - 求导得出的式(2)和(3).与最大值有关的 n_i 是

$$n_i = g_i e^{-1-\lambda_1} e^{-\lambda_2 E_i} = A g_i e^{-\beta E_i} \tag{5}$$

这里 $A = e^{-1-\lambda_1}$, $\beta = \lambda_2$ 是未知常数.

25.17　参照题 25.16.证明在假设(a)"单元"是速度空间的无穷小体积 $dv_x dv_y dv_z$(见题 24.6)并且在每个单元找到的粒子是等概率的(即全部的 g_i 都相等);(b)粒子能量的平均值由动能理论给出,$E_{avg}=\frac{3}{2}kT$,之下,则从式(5)可导出麦克斯韦-玻尔兹曼分布.

解　在等概率假设下,粒子将在无穷小单元 $dv_x dv_y dv_z$ 找到的内禀概率恰好是

$$g\,dv_x dv_y dv_z$$

这里 g 是常数.在单元中每一个粒子具有相同的能量,

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$$

于是题 25.16 的式(5)给出单元中的粒子数

$$dn_v = Ae^{-\beta E}dv_x dv_y dv_z \tag{1}$$

这里我们将常数 g 吸收进了 A 中.如同在题 25.6 中那样规一化——除了那里的 β 是早已经知道的——我们得到

$$A = N\frac{(m/2)^{3/2}}{\pi^{3/2}}\beta^{3/2} \tag{2}$$

最后,如同题 25.7 那样处理——那里 β 还是早已经知道的——我们有

$$E_{avg} = \frac{3}{2\beta} \tag{3}$$

将它与 $3kT/2$ 相等给出 $\beta=1/kT$,并且从式(2),

$$A = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

用所得到的 β 及 A 的值,式(1)是麦克斯韦-玻尔兹曼分布.

25.18　求出 $N=5$ 的可区分粒子在 $r=3$ 个单元中的最概然分布,设这些单元的内禀概率是

$$g_1 = g_2 = g_3 = \frac{1}{3}$$

解　由题 25.15 的式(1),考虑到 $n_1+n_2+n_3=5$,分布(n_1,n_2,n_3)的概率是

$$P_n = \frac{5!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

于是,最概然分布是指实现它的方式数

$$X = \frac{5!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$

是最大值.因为在任何两个单元之间交换粒子,例如,

$$n_1 = 3,\quad n_2 = 2,\quad n_3 = 0 \rightarrow n_1 = 2,\quad n_2 = 3,\quad n_3 = 0$$

其结果是产生同样 X 值,我们有表 25-2 中只列出 $n_1\geqslant n_2\geqslant n_3$ 情况下计算得的 X.

表 25-2

n_1	n_2	n_3	X
5	0	0	1
4	1	0	5
3	2	0	10
3	1	1	20
2	2	1	30

从表中可以看到,这里有 3 组最概然分布:

$$(2,2,1),(2,1,2)\text{和}(1,2,2)$$

它们都有 $X=30$.

25.19　对于题 25.18,如果在单元 1 中的粒子能量是零,在单元 2 中是 ε,而在单元 3 中是

2ϵ，如果总能量是固定的，$E_{tot}=3\epsilon$，求出最概然分布.

解 ☞ 约束

$$0n_1+\epsilon n_2+2\epsilon n_3=3\epsilon \quad 或 \quad n_2+2n_3=3$$

只保留下分布(3,1,1)和(2,3,0)而排除了其余的分布.从表25-2看到(3,1,1)是最概然分布.

对于等内禀概率,麦克斯韦-玻尔兹曼分布具有形式

$$n_i = A\mathrm{e}^{-\beta E_i}$$

分布(3,1,1)中有最多的粒子处于最低能量态,它比起(2,3,0)来更接近于麦克斯韦-玻尔兹曼分布.

补充习题

25.20 对于由麦克斯韦-玻尔兹曼分布描述的气体,求出其均方根速率 v_{rms}和平均速率 v_{avg}之比.

答案:$\sqrt{3\pi/8}=1.08$

25.21 对于题25.10中的线路,$L=1\mathrm{mH}$, $C=1\mu\mathrm{F}$, $R=0.1\Omega$和 $T=300\mathrm{K}$.求出在电感中产生的电压.

答案:$6.44\times10^{-8}\mathrm{V}$

25.22 6个可区分粒子分布在3个单元之中.求出(a)分布(6,0,0),(b)分布(4,1,1)可能产生的粒子不同组合数.

答案:(a) 1;(b)30

25.23 在题25.22中,设3个单元具有相应的粒子能量为0,ϵ和2ϵ.如果这些单元的内禀概率是相等的,问总能量为6ϵ的最概然分布是什么?

答案:每个单元有2个粒子.

25.24 参照题25.19.总能量为4ϵ的最概然分布是什么?

答案:(2,2,1)

25.25 考虑50个可区分粒子,它们分布在8个单元中,如下:

单元	1	2	3	4	5	6	7	8
粒子数	6	8	9	0	7	2	10	8

由50个粒子在这种分布下的组合数是多少?

答案:1.96×10^{36}

25.26 对于能量为ϵ及2ϵ的两状态系统,如果$g_1=g_2=\frac{1}{2}$,求出最概然分布下的平均能量.

答案:$E_{avg}=\dfrac{2\epsilon\mathrm{e}^{-2\beta\epsilon}+\epsilon\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}}{\mathrm{e}^{-2\beta\epsilon}+\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}}$

25.27 用配分函数

$$Z=\sum_i g_i\mathrm{e}^{-\beta E_i}$$

和粒子数总数N将题25.16中的分布(5)表达出来.

答案:$n_i=\dfrac{N}{Z}g_i\mathrm{e}^{-\beta E_i}$

第 26 章 量子统计:费米-狄拉克和玻色-爱因斯坦分布

量子统计描述由大量粒子组成的服从量子力学规律的系统.每一个系统具有大量的离散态,每一个态由一组完全的量子数描述,系统中每一个粒子占据着其中的一个态.量子统计区别于经典统计的特点之一是其推导建立在量子分布函数上,这里粒子是不能彼此区分的.换句话说,在原则上不能用,例如,一些数字在各个时刻去区分粒子.

26.1 费米-狄拉克统计

具有半整数自旋的粒子称为费米子,它的统计由 E.费米和 P.狄拉克提出.费米系统的一个例子是大量的相互间作用微弱的电子(自旋 1/2),即电子"气".

费米-狄拉克分布函数 F_{FD} 描述服从泡利原理的,全同的,不可区分的粒子.在绝对温度 T 下平衡的费米子系统中,在能量 E_i 下的某个态 i 中的粒子期望数是(见题 26.35)

$$F_{FD} = \frac{1}{e^{\alpha}e^{E_i/kT}+1} = \frac{1}{e^{(E_i-E_f)/kT}+1} \tag{26.1}$$

这里 k 是玻尔兹曼常数,而 $E_f=-kT\alpha$ 称为费米能,它是所描述的系统的一个特征.α 和 E_f 两者都是 T 的函数.当 $T\to 0\text{K}$, $E_f\to E_{f0}$,一个正常数.E_f 或 α 的准确形式由系统中的粒子数是固定数的规一化条件确定.

要注意,如 F_{MB},费米-狄拉克分布函数 F_{FD} 并不是给出能量为 E_i 的粒子数,而是占据能量为 E_i 的状态 i 的粒子数.如同在 24.3 节所叙述的(对于连续的情况),为了求得能量为 E_i 的粒子数 n_i,我们需要将费米-狄拉克分布函数与能量 E_i 的状态数 g_i 相乘:

$$n_i = g_iF_{FD}$$

如果能级靠得很紧,使得它们可以当作连续情况处理,能量在 E 和 $E+\mathrm{d}E$ 之间的粒子数 $\mathrm{d}n_E$ 是

$$\mathrm{d}n_E = F_{FD}g(E)\mathrm{d}E$$

这里 $\mathrm{d}S_E=g(E)\mathrm{d}E$ 是能量在 E 到 $E+\mathrm{d}E$ 之间的量子态数.如同在 24.3 节所讨论的,量 $g(E)$ 称为态密度.

26.2 玻色-爱因斯坦统计

A.爱因斯坦和 S.玻色提出了一个统计,它适用于大量的,相互作用弱的,具有整数自旋的,全同的和不可区分的粒子所组成的系统.这些粒子称为玻色子,不服从泡利不相容原理.玻色系统的例子是光子,H_2 分子,和液氦.

玻色-爱因斯坦分布函数 F_{BE} 给出在温度 T 下平衡的系统的玻色子平均数,在能量为 E_i 的特定态 i 上有(见题 26.37)

$$F_{BE} = \frac{1}{e^{\alpha}e^{E_i/kT}-1} \tag{26.2}$$

量 α 的值与正要讨论的一个玻色系统有关.对于粒子数不守恒的玻色系统(例如,光子),有 $\alpha=0$(题 26.38).与麦克斯韦-玻尔兹曼及费米-狄拉克统计相比,玻色子的按能量分布关系用态密度函数表示出来是

$$\mathrm{d}n_E = F_{BE}g(E)\mathrm{d}E$$

26.3 高温极限

在粒子总数守恒条件下,两种量子统计的 α 都随温度单调递增(题 26.25 和 26.28).在充

分高的温度下(或充分高的能量下),

$$e^{\alpha}e^{E/kT} \gg 1$$

而两种量子分布函数都归结为

$$F = Ae^{-E/kT}$$

这正是经典的麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数.

26.4 两个有用的积分

(a)当 $p > -1$,在低温极限 $kT \ll E_f$ 下(即 $\alpha \ll -1$),

$$\int_0^{\infty} E^p F_{FD} \mathrm{d}E = \int_0^{\infty} \frac{E^p}{e^{(E-E_f)/kT}+1}\mathrm{d}E$$

$$= \frac{1}{p+1}\left[E_f^{p+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(kT)^{2n}\left(1-\frac{1}{2^{2n-1}}\right)\zeta(2n)\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}E_f^{2n}}(E_f^{p+1})\right] \quad (26.3)$$

这里 $\zeta(x)$是黎曼 ζ 函数,

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$$

它们已广为列表.其中的某些值是

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.645, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.082, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1.017$$

在 p 是一个整数时,式(26.3)中的级数只有有限项.

(b)当 $p > 0$, $\alpha \geqslant 0$ 和 $\varepsilon = \pm 1$,我们有

$$\int_0^{\infty} \frac{q^p}{e^{\alpha}e^{q} - \varepsilon}\mathrm{d}q = \Gamma(p+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{n+1}e^{-n\alpha}}{n^{p+1}} \quad (26.4)$$

这里 γ 函数 $\Gamma(x)$满足 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.一些特殊的值是

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n,\text{整数})$$

在特殊情况 $\alpha = 0$, $\varepsilon = +1$,式(26.4)成为

$$\int_0^{\infty} \frac{q^p}{e^q - 1}\mathrm{d}q = \Gamma(p+1)\zeta(p+1) \quad (26.5)$$

26.5 黑体辐射

温度为 T 的空腔壁连续地发送和吸收电磁辐射(光子),并且在平衡时壁上的能量发送和吸收在总量上相等.分析空腔中的辐射可在空腔的一个壁打开一个小洞,逸出的光子组成了所谓的黑体辐射.量子物理诞生于1900年,此年普朗克找到了实验上观察到的黑体辐射的频谱分布,即总辐射能量在频率处于 ν 和 $\nu + \mathrm{d}\nu$ 之间的部分的正确表达式.

例题详解

26.1 为简单起见,考虑边长为 l 的立方空腔,它的边确定了一组坐标轴,而壁的温度保持为温度 T.电磁波的麦克斯韦方程表明波矢量

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda^2}\boldsymbol{\lambda}$$

的直角坐标分量必须满足边界条件

$$\frac{k_x l}{\pi} = n_x, \quad \frac{k_y l}{\pi} = n_y, \quad \frac{k_z l}{\pi} = n_z$$

这里 n_x, n_y 和 n_z 是正整数(这些边界条件保证了立方空腔的每一个边都是半波长的整数倍.)每一组三重数(n_x, n_y, n_z),在古典意义下,代表空腔中电磁振动的一个模式;我

们将这些模式认作是光子态.求出在 ν 到 $\nu+d\nu$ 频率区间内的模式数,这里对于每一个模式有两个独立的方向.

解 每一个可允许频率 ν 对应于某个模式(n_x, n_y, n_z),并且可以记作

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=\frac{ck}{2\pi}=\frac{c}{2l}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}=\frac{cN}{2l}$$

这里 $N=\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$.我们不去讨论对应于某个给定 N 的整数态(n_x, n_y, n_z)的个数,而代之以利用连续近似求出在(n_x, n_y, n_z)空间第一卦限内半径为 N,厚度为 dN 的球壳中的点数.它就是"体积"

$$dM=\frac{1}{8}(4\pi N^2 dN)=\frac{\pi}{2}N^2 dN$$

但是 N 到 $N+dN$ 之间的状态数必须等于相应的频率 ν 到 $\nu+d\nu$ 之间的状态数.利用 $\nu=cN/2l$,

$$dN=\frac{2l}{c}d\nu$$

从而

$$dM=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2l\nu}{c}\right)^2\left(\frac{2l}{c}d\nu\right)=\frac{4\pi l^3}{c^3}\nu^2 d\nu=\frac{4\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

这里 V 是空腔的体积.因为对于每一个模式有两个独立的极化方向,于是要将 dM 乘以 2 而得到光子态数 dS:

$$dS=2dM=\frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu=g(\nu)d\nu$$

在频率范围 $d\nu$ 内的光子态密度是

$$g(\nu)=\frac{8\pi V}{c^3}\nu^2$$

26.2 将题 26.1 的空腔当作是一个光子容器,光子是自旋为 1 的玻色子,求出从容器上小洞出来的黑体辐射的频谱分布(单位频率区间的能量大小).因为光子从器壁连续地放射和吸收,它们的数目不守恒.

解 利用在题 26.1 确定的态密度 $g(\nu)$和光子的玻色-爱因斯坦分布函数(26.2),其中的 $\alpha=0$,我们得到频率在 ν 到 $\nu+d\nu$ 之间的光子数 dn_ν 是

$$dn_\nu=F_{BE}g(\nu)d d\nu=\frac{1}{e^{E/kT}-1}\frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

每一个光子具有能量 $E=h\nu$,所以由 dn_ν 个光子所带的能量值为

$$dE_\nu=h\nu dn_\nu=\frac{8\pi Vh}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu=F(\nu)d\nu$$

频谱分布 $F(\nu)$画在图 26-1 中.需要指出的普朗克获得函数 $F(\nu)$的思路与这里的不同.

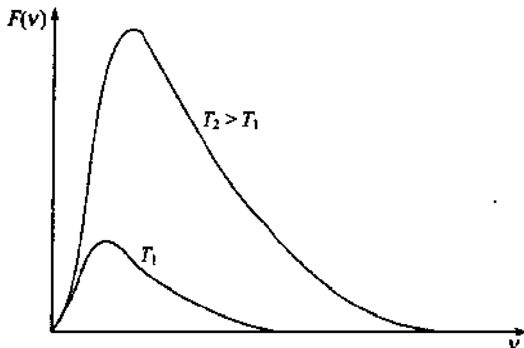


图 26-1

26.3 斯特藩-玻尔兹曼定律是指壁温为 T 的空腔中的总电磁能正比于 T^4.问怎样从题 26.2 的结果中导出这个规律,并且求出比例因子.

解 在题 26.2 的空腔中的总能量是

$$E = \int \mathrm{d}E_\nu = \frac{8\pi Vh}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 \mathrm{d}\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1} = \frac{8\pi Vk^4T^4}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{q^3\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^q-1} = 常数 \times T^4$$

从式(25.5)此积分具有数值

$$\Gamma(4)\zeta(4) = 3!\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15} = 6.49$$

所以

$$E = \frac{8\pi k^4(6.49)}{(hc)^3}VT^4 = \frac{8\pi(8.617\times10^{-5}\mathrm{eV/K})^4(6.49)}{(12.4\times10^{-7}\mathrm{eV\cdot m})^3}VT^4$$

$$= (4.71\mathrm{keV/K^4\cdot m^3})VT^4$$

26.4 从图 26-1 看到频谱分布曲线的最高点所在处的频率随温度增大而前移.维恩位移定律是指

$$\lambda_{\max}T = 常数$$

这里 $\lambda_{\max}$是指一个波长 $F(\nu)$在这里取得最大值.推导出维恩位移定律.

解 ☞ 设

$$\frac{\mathrm{d}F(\nu)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left[\frac{8\pi Vh}{c^3}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\right] = \frac{8\pi Vh}{c^3}\frac{\nu^2\left[\mathrm{e}^{h\nu/kT}\left(3-\frac{h\nu}{kT}\right)-3\right]}{(\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1)^2} = 0$$

对于最大值,我们得到

$$\mathrm{e}^{h\nu_{\max}/kT}\left(3-\frac{h\nu_{\max}}{kT}\right)-3 \equiv \mathrm{e}^y(3-y)-3 = 0$$

这个关于 $y = h\nu_{\max}/kT$ 的超越方程可以用近似方法求解,解得的结果可记成

$$y = \frac{h\nu_{\max}}{kT} = 常数$$

或者,因为 $\nu_{\max} = c/\lambda_{\max}$,

$$\lambda_{\max}T = 常数$$

26.5 求出在 2000K 黑体中带宽为 100Å 中心在 5000Å(可见光)与中心在 50000Å 的发射能量之比.

解 ☞ 按波长的频谱分布可以由(只用大小)

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \mathrm{d}\nu = \frac{c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$$

从题 26.2 中的 $\mathrm{d}E_\nu$ 的表达式,我们得到

$$\mathrm{d}E_\lambda = \frac{8\pi hcV}{\lambda^5}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{e}^{hc/kT\lambda}-1} = F(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

在带宽 $\Delta\lambda = 100$Å 是相当小的,在这个区间内 $F(\lambda)$可当成常数,有

$$\frac{\Delta E_{50000}}{\Delta E_{5000}} = \frac{(5000\text{Å})^5}{(50000\text{Å})^5}\cdot\frac{\mathrm{e}^{(12400\mathrm{eV}\cdot\text{Å})/(8.62\times10^{-5}\mathrm{eV/K})(2000\mathrm{K})(5000\text{Å})}-1}{\mathrm{e}^{(12400\mathrm{eV}\cdot\text{Å})/(8.62\times10^{-5}\mathrm{eV/K})(2000\mathrm{K})(50000\text{Å})}-1}$$

$$= 5.50$$

这个结果表示以可见光形式发射出去的能量只是全部能量的一小部分.

26.6 金属的自由电子理论

在金属的自由电子理论中认为金属原子中束缚较弱的价电子并不限制在某个指定的原子中而是在整个固体中运动.进一步假设,对于每个电子来说,其他价电子以及束缚电子和核对它的净作用力为零.这些假设相当于认为每个电子受常值静电位势作用下在金属中运动.因为电子在边界上受到净静电力的作用,所以电势在金属边界上急剧上升.于是,在这个模型中,金属中的电子被当作是放在三维箱子中由无相互作用的自旋$\frac{1}{2}$费米子所组成的气体.

例题详解

26.6 对于长度为 l 的一维无穷方势阱而言,在其中质量 m 的无相互作用粒子的可允许能量

在题10.20中找到是 $E_n = n^2 E_0$，这里 n 是一个正整数并且 $E_0 = h^2/8ml^2$. 推广到边长为 l 的三维无穷势阱上有

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)E_0, \qquad E_0 = \frac{h^2}{8ml^2}$$

这里 n_x, n_y, n_z 是正整数. 从这里看到，一些不同的态 (n_x, n_y, n_z) 可以具有相同的能量，这种情况称为简并. 求出前6个能级的简并阶数，或者说各个能级的态数.

解 ☞ 见表26-1. 对于较高的能级，能量相同的态不一定就是同样的整数集合置换的结果，见题26.43

表 26-1

能量	等能量态 (n_x, n_y, n_z)	简并阶数
$3E_0$	(1,1,1)	1
$6E_0$	(2,1,1)(1,2,1)(1,1,2)	3
$9E_0$	(2,2,1)(2,1,2)(1,2,2)	3
$11E_0$	(3,1,1)(1,3,1)(1,1,3)	3
$12E_0$	(2,2,2)	1
$14E_0$	(1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)	
	(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1)	6

26.7 对于金属中电子或者容器中的气体分子，令题26.6中的 l 值足够地大，使得能级可以当作连续谱处理. 现在求出能量在 E 到 $E+\mathrm{d}E$ 区间的状态 (n_x, n_y, n_z) 的数目.

解 ☞ 这里的问题与黑体问题26.1非常相似. 记 $N = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$，我们得到能量在 E 到 $E+\mathrm{d}E$ 的状态数 $\mathrm{d}S$：

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{8}(4\pi N^2 \mathrm{d}N) = \frac{\pi}{2}N^2 \mathrm{d}N$$

从题26.6，

$$N^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = E\left(\frac{8ml^2}{h^2}\right)$$

所以

$$N = \left(\frac{8ml^2}{h^2}\right)^{1/2} E^{1/2} \qquad \mathrm{d}N = \left(\frac{8ml^2}{h^2}\right)^{1/2} \frac{\mathrm{d}E}{2E^{1/2}}$$

和

$$\mathrm{d}S = \frac{\pi}{2}E\left(\frac{8ml^2}{h^2}\right)\left(\frac{8ml^2}{h^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\mathrm{d}E}{2E^{1/2}}\right) = \frac{2\pi l^3(2m)^{3/2}}{h^3}E^{1/2}\mathrm{d}E$$

注意 $V = l^3$，在能量区间 $\mathrm{d}E$ 内的态密度是

$$g(E) = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}E^{1/2}$$

26.8 画出在 $T \approx 0\mathrm{K}$ 的费米-狄拉克分布函数相对于能量的图形.

解 ☞ 在 $T = 0\mathrm{K}$，$E_f \approx E_{f0} > 0$，所以

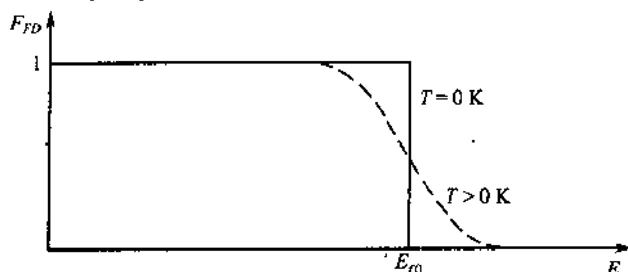


图 26-2

$$F_{FD} \approx \frac{1}{e^{(E-E_{f0})/kT}+1}$$

如果 $E<E_{f0}$ 并且 $T\to 0$, $e^{(E-E_{f0})/kT}\to 0$ 并且 $F_{FD}=1$. 如果 $E>E_{f0}$ 并且 $T\to 0K$, $e^{(E-E_{f0})/kT}\to\infty$ 并且 $F_{FD}=0$. 于是, F_{FD} 相对于 E 的图形具有图 26-2 所示的实线所画的形式, 如果 $T>0K$, 这时的图形将如其中的虚线所示.

26.9 对于金属中的电子气, 求出在 $T=0K$ 的费米能 E_{f0} 的表达式.

解 ☞ 在问题 26.7 中, 我们得到在能量区间 E 和 $E+dE$ 之间的状态 (n_x, n_y, n_z) 数是

$$dS = g(E)dE = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}E^{1/2}dE$$

因为对于每一个量子数集合 (n_x, n_y, n_z), 这里有两个可能的电子自旋方向, 我们必须将 $g(E)$ 乘以因子 2 以求得电子气的实际态密度. 于是, 在系统中的费米子总数是

$$N = 2\int_0^\infty F_{FD}g(E)dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{E^{1/2}dE}{e^{(E-E_f)/kT}+1}$$

在 $T=0K$, 费米-狄拉克分布函数是(见题 26.8)

$$F_{FD} = 1, \quad 当\ E < E_{f0}$$

$$F_{FD} = 0, \quad 当\ E > E_{f0}$$

所以可以更改积分限, 得到

$$N = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_{f0}} E^{1/2}dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\left(\frac{2}{3}E_{f0}^{3/2}\right)$$

或

$$E_{f0} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$$

当温度增加, 可以得到(见题 26.13)费米能仍然在 E_{f0} 附近.

26.10 金属钾有密度 $0.86\times10^3 kg/m^3$ 并且原子量是 39. 如果每个钾原子贡献出一个电子给电子气, 求出这个金属中电子的费米能量.

解 ☞ 首先, 我们计算单位体积的电子数 N/V:

$$\frac{N}{V} = \frac{(6.02\times10^{26}\ 原子/kmol)(0.86\times10^3 kg/m^3)}{39 kg/kmol}$$

$$= 1.33\times10^{28}\frac{原子}{m^3} = 1.33\times10^{26}\frac{电子}{m^3}$$

于是, 从题 26.9

$$E_{f0} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} = \frac{(hc)^2}{8mc^2}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} = \frac{(12.4\times10^{-7}eV\cdot m)^2}{8(0.511\times10^6 eV)}\left(\frac{3\times1.33\times10^{28}m^{-3}}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$= 2.05eV$$

在 300K, $kT=0.026eV$, 所以看来 $E_f\approx E_{f0}$ 比起室温中的 kT 要大得多.

26.11 求出在 $T=0K$ 时 N 粒子费米气中每个粒子的平均动能.

解 ☞ 利用题 26.9 找到的态密度, 我们有

$$E_{avg} = \frac{1}{N}\int E dn_E = \frac{2}{N}\int_0^\infty EF_{FD}g(E)dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{Nh^3}\int_0^\infty \frac{E^{3/2}dE}{e^{(E-E_f)/kT}+1}$$

$$= \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{Nh^3}\int_0^{E_{f0}} E^{3/2}dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{Nh^3}\left(\frac{2}{5}E_{f0}^{5/2}\right)$$

将题 26.9 中的 N 值代入, 我们找到

$$E_{avg} = \frac{3}{5}E_{f0}$$

于是, 甚至在 0K, 电子, 从平均值说, 有相当大的动能. 所以会这样是因为泡利不相容原理不允许全部电子都在最低能级, 于是电子有比 E_{f0} 高的总能量.

26.12 利用粒子总数是一个定数的正规化条件, 用在 $T=0K$ 的费米能 E_{f0}, 求出低温时的关于电子气的费米能 E_f 的表达式.

解 ☞ 粒子数是

$$N = \int_0^\infty F_{FD}g(E)\mathrm{d}E = C\int_0^\infty E^{1/2}F_{FD}\mathrm{d}E$$

这里,从题 26.9,态密度是 $g(E) = CE^{1/2}\mathrm{d}E$ 而 $C = 4\pi V(2m)^{3/2}/h^3$.方程(26.3)给出,取 $p = \frac{1}{2}$ 并且仅保留级数的第一项,

$$\begin{aligned} N &= C\int_0^\infty E^{1/2}F_{FD}\mathrm{d}E \approx \frac{2C}{3}\left[E_f^{3/2} + 2(kT)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\zeta(2)\left(\frac{3}{4}E_f^{-1/2}\right)\right] \\ &= \frac{2C}{3}E_f^{3/2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8E_f^2}(kT)^2\right] \end{aligned} \tag{1}$$

让(1)中的 $T \to 0\mathrm{K}$,我们得到

$$N = \frac{2C}{3}E_{f0}^{3/2}$$

或

$$E_{f0} = \left(\frac{3N}{2C}\right)^{2/3} = \left(\frac{3Nh^3}{8\pi V(2m)^{3/2}}\right)^{2/3} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$$

它与题 26.9 的结果相同.因为 kT/E_f 是小量,我们从式(1)看到 E_f 并不随温度快速改变.于是,我们可以在式(1)右方第 2 项中令 $E_f = E_{f0}$,代进 $N = 2CE_{f0}^{3/2}/3$,我们得到,

$$\frac{2C}{3}E_{f0}^{3/2} = \frac{2C}{3}E_f^{3/2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]$$

从而

$$E_f = E_{f0}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]^{-2/3}$$

最后,注意对于小的 x

$$(1 + x)^{-2/3} = 1 - \frac{2}{3}x$$

我们可以记

$$E_f = E_{f0}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]$$

26.13 银在 $T = 0\mathrm{K}$ 时有费米能 5.5eV.利用题 26.12 的结果,估计在 $T = 300\mathrm{K}$ 时一级修正的大小.

解 1 级修正是

$$\frac{-\pi^2}{12}\frac{(kT)^2}{E_{f0}} = \frac{-\pi^2}{12}\frac{[(8.617 \times 10^{-5}\mathrm{eV/K})(300\mathrm{K})]^2}{5.5\mathrm{eV}} = -10^{-4}\mathrm{eV}$$

这几乎是无关紧要的改变.

26.14 在 0K,银有费米能 5.5eV 和功函数 4.6eV,由银中的自由电子看来,平均静电势能是多少?

解 功函数 ϕ 是从材料中移去一个电子所需的最小能量.电子移动有最大动能,在 0K 时是费米能 E_{f0}.而对于箱子中粒子,E_{f0}是在平均静电势能 $-E_0$ 上量出的能量.各种能量之间的关系见图 26-3,从图上可以看到

$$E_0 = E_{f0} - \phi = 5.5\mathrm{eV} + 4.6\mathrm{eV} = 10.1\mathrm{eV}$$

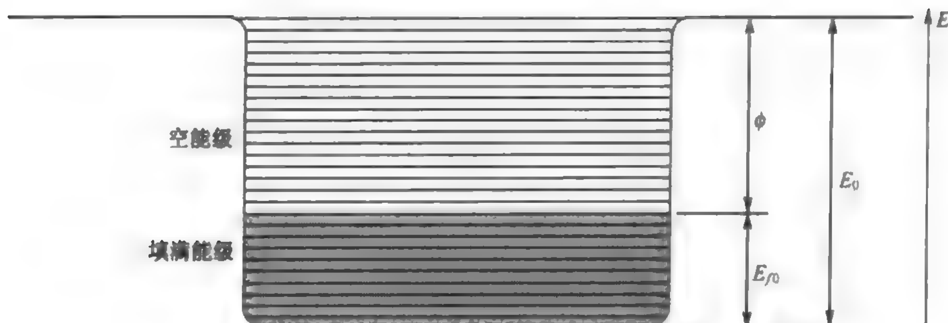


图 26-3

因为对于适当的温度 $E_f \approx E_{f0}$(问题 26.13),这个结果说明了为什么金属的功函数基本上与温度无关.

26.7 晶体的比热

在常体积下固体的摩尔比热 C_V 定义为在固体体积保持不变下温度改变一个单位时一摩尔固体的内能的改变量:

$$C_V = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_V$$

这里 E_T 是 $\mathcal{N}$ 摩尔固体所具有的总能量.由于经典的原因,希望晶状固体的比热是与温度无关的常数,并且服从杜隆-珀替定律(见题 25.9),$C_V = 3R$,这里 R 是理想气体常数.但实验上找到的 C_V 随温度变化,如图 26-4.

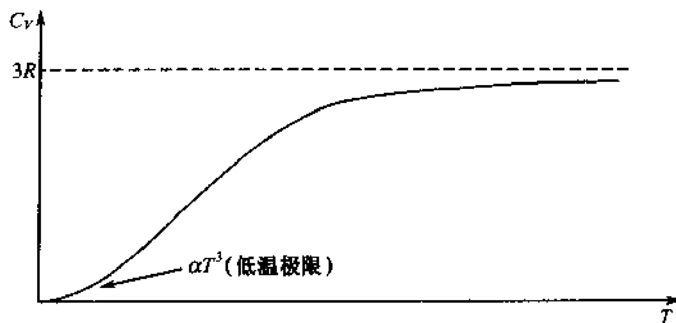


图 26-4

对于所观察到的 C_V 的行为的一个成功的解释由德拜在 1912 年给出,他改进了较早的由爱因斯坦在 1906 年所提出的理论.在德拜理论中,晶体看作是在三维格点上有序排列的原子组合而成.如果一个原子偏离平衡位置,它受到周围原子作用于它的恢复力的作用,原子像一系列相互耦合的振子在起作用.任何扰动都会传播给周围原子,其结果成为在固体中传播的波.我们知道,从一个原子传到相邻原子的能量大小是量子化的,单位为 $h\nu$,这里 ν 是经典频率,原子按照这个频率在平衡位置附近振动.每一个声能量子 $h\nu$ 称为声子,可与电磁辐射中的光子类比.

波在晶格中传播可以是横波或纵波,其速度分别是 v_t 和 v_l.一个横波具有两个振动自由度,而一个纵波只有一个自由度.晶体的每一个振动自由度(振动模)对应于系统的一个态,而声子按照玻色-爱因斯坦分布规律分布在这些态之间.

在晶体中有最大的振动频率,称为德拜频率,ν_d.这个最大频率存在理由是因为 N 个分子的系统只有 $3N$ 个振动模式(每个分子有 3 个独立的振动自由度).要求出晶状固体的比热先要找到德拜频率和晶体的态密度(题 26.15 和 26.16),然后利用上述结果求出振动动能和摩尔比热(题 26.17 和 26.18).

除了由原子振动传递能量之外,如果晶状固体是导体,这里还有自由传导电子所传递的能量.总的比热是电子比热和格点比热之和.但是,如同在题 26.23 和 26.24 所指出的,电子对能量传递的贡献仅在于非常低温时才变得重要.

例题详解

26.15 求出频率在 ν 到 $\nu + d\nu$ 区间内的振动态数目.

解 ☞ 在固体中声波的传送非常类似于题 26.1 的空腔中黑体的光子振动.与题 26.1 相同的理由,对于每一种类型的振动,频率在 ν 到 $\nu + d\nu$ 区间里的振动模的数目是

$$\mathrm{d}M = \frac{4\pi V}{c^3}\nu^2\mathrm{d}\nu$$

这里 c 是波在介质中的传播速度. 考虑到横波的两个振动自由度和纵波的一个振动自由度, 在 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 频率区间内的振动状态数 $\mathrm{d}S$ 是

$$\mathrm{d}S = g(\nu)\mathrm{d}\nu = 4\pi V\left(\frac{2}{v_t^3}+\frac{1}{v_l^3}\right)\nu^2\mathrm{d}\nu$$

于是在频率区间 $\mathrm{d}\nu$ 中的态密度是

$$g(\nu) = 4\pi V\left(\frac{2}{v_t^3}+\frac{1}{v_l^3}\right)\nu^2$$

26.16 用德拜频率 ν_d, 它是由 N 个分子组成的固体的最大的可能振动频率, 改写题 26.15 中得到的状态密度.

解 ☞ 可能的状态数是有限的, 它等于 $3N$. 于是

$$3N = \int\mathrm{d}S = \int_0^{\nu_d} g(\nu)\mathrm{d}\nu = 4\pi V\left(\frac{2}{v_t^3}+\frac{1}{v_l^3}\right)\int_0^{\nu_d}\nu^2\mathrm{d}\nu = 4\pi V\left(\frac{2}{v_t^3}+\frac{1}{v_l^3}\right)\frac{\nu_d^3}{3}$$

这样, 态密度取下面的形式

$$g(\nu) = 4\pi V\left(\frac{2}{v_t^3}+\frac{1}{v_l^3}\right)\nu^2 = \frac{9N}{\nu_d^3}\nu^2$$

26.17 设通过晶格的声能以称为声子的赝粒子的量子化大小 $h\nu$ 传播, 声子是玻色子, 它的总数像光子一样是不确定的. 求出晶状固体的总动能(总振动能)的表达式.

解 ☞ 频率在 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 之间的声子数是

$$\mathrm{d}n_\nu = F_{BE}g(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{1}{\mathrm{e}^{E/kT}-1}\frac{9N}{\nu_d^3}\nu^2\mathrm{d}\nu$$

固体的总能量 E_T 是声子能量的总和:

$$E_T = \int\mathrm{d}E = \frac{9Nh}{\nu_d^3}\int_0^{\nu_d}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\mathrm{d}\nu = 9NkT\left(\frac{T}{T_d}\right)^3\int_0^{q_d}\frac{q^3\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^q-1}$$

这里 $q_d=\frac{h\nu_d}{kT}$, 并且 $T_d=\frac{h\nu_d}{k}$(称为德拜温度). 这个积分必须用数值计算.

26.18 从题 26.17 的结果, 在极限 $T\ll T_d$ 下, 求出在体积不变下的摩尔比热 C_V 的表达式.

解 ☞ 从题 26.17, 总能量是

$$E_T = 9NkT\left(\frac{T}{T_d}\right)^3\int_0^{q_d}\frac{q^3\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^q-1}$$

这里 $q_d=h\nu_d/kT=T_d/T$. 对于 $T\ll T_d$, 我们有 $q_d\to\infty$, 而积分值趋于 $\pi^4/15$(题 26.3). 于是

$$E_T = 9NkT\left(\frac{T}{T_d}\right)^3\frac{\pi^4}{15}$$

利用 C_V 的定义, 于是我们得到

$$C_V = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_V = \frac{36kN}{\mathcal{N}}\frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{T_d}\right)^3 = \frac{12\pi^4 R}{5}\left(\frac{T}{T_d}\right)^3$$

这里我们利用了结果 $kN/\mathcal{N}=R$. 实验上找到在低温时 C_V 随同 T^3 变化.

26.19 在经典的杜隆-珀替定律(见题 25.9)中指出 $C_V=3R$. 证明这个定律如何从问题 26.17 的结果中在 $T\gg T_d$ 的极限下导出.

解 ☞ 从题 26.17, 我们有

$$E_T = 9NkT\left(\frac{T}{T_D}\right)^3\int_0^{q_d}\frac{q^3\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^q-1}$$

对于 $T\gg T_d$, $q_d=T_d/T\to 0$, 所以我们可以在积分范围内记

$$\mathrm{e}^q\approx 1+q$$

于是

$$E_T\approx 9NkT\left(\frac{T}{T_d}\right)^3\int_0^{T_d/T}q^2\mathrm{d}q = 3NkT$$

从 C_V 的定义,

$$C_V = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_V = 3\frac{N}{\mathcal{N}}k = 3R$$

从实验中看到，这个结果仅在高温下适用.

26.20 从题 26.17 的结果，求出在任意温度下关于 C_V 的表达式

解 ☞

$$C_V = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_V = \frac{N}{\mathcal{N}}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{9Nh}{\nu_d^3}\int_0^{\nu_d}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu\right]$$

$$= \frac{9Nkh^2}{\mathcal{N}\nu_d^3(kT)^2}\int_0^{\nu_d}\frac{\nu^4 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2}d\nu = \frac{9Rh^2}{\nu_d^3(kT)^2}\int_0^{\nu_d}\frac{\nu^4 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2}d\nu$$

这里 $kN/\mathcal{N}=R$. 用德拜温度 $T_d = h\nu_d/k$ 以及变量 $q = h\nu/kT$，这个表达式成为

$$C_V = 9R\left(\frac{T}{T_d}\right)^3\int_0^{T_d/T}\frac{q^4e^q}{(e^q-1)^2}dq$$

当这个 C_V 的表达式相对于 T 画曲线时，得到的结果与图 26-4 的实验曲线很接近.

26.21 求出在低温时电子气的总能量.

解 ☞ 总能量是

$$E_T = \int_0^\infty EF_{FD}g(E)dE$$

这里，从题 26.9，$g(E) = CE^{1/2}$. 于是，利用式(26.3)并且只保留级数中的第一项，

$$E_T = C\int_0^\infty E^{3/2}F_{FD}dE = \frac{2C}{5}\left[E_f^{5/2} + 2(rT)^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi^2}{6}\right)\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}E_f^{1/2}\right)\right]$$

$$= \frac{2C}{5}E_f^{5/2}\left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_f}\right)^2\right]$$

利用题 26.12 的结果，将 C 和 E_f 用 E_{f0} 表达出来，并且回忆起 E_f 并不随着温度快速改变，我们可将 E_T 表达如下：

$$E_f = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}NE_{f0}^{-3/2}\right)E_{f0}^{5/2}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]^{5/2}\left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]$$

$$\approx \frac{3}{5}NE_{f0}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]$$

这里，与以前的近似一样，我们只保了与 $(kT/E_{f0})^2$ 的一阶.

26.22 对于题 26.21 的电子气，求出在不变体积下的摩尔电子比热 C_{Ve} 的一阶.

解 ☞

$$C_{Ve} = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{\mathcal{N}}\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{3}{5}NE_{f0}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{3}{5}\frac{N}{\mathcal{N}}E_{f0}\left(\frac{5}{6}\frac{\pi^2k^2T}{E_{f0}^2}\right) = \frac{N\pi^2k^2}{2\mathcal{N}E_{f0}}T = \frac{R\pi^2k}{2E_{f0}}T$$

这里 $R = Nk/\mathcal{N}$.

26.23 估计在室温($T = 300$K)估计银的摩尔电子比热 C_{Ve}. 银有费米能 $E_{f0} = 5.5$eV.

解 ☞ 从题 26.22

$$C_{Ve} = \frac{R\pi^2kT}{2E_{f0}} = \frac{(8.31\text{J/mol}\cdot\text{K})\pi^2(8.62\times10^{-5}\text{eV/K})(300\text{K})}{2(5.5\text{eV})} = 0.19\text{J/mol}\cdot\text{K}$$

这是每摩尔原子的值. 但是，因为银是 1 价，1 摩尔原子对应于 1 摩尔电子. 注意在 $T = 300$K，德拜理论指出，格点振动的比热接近 $3R\approx 25$J/mol·K(杜隆-珀替极限)，所以在这个温度上电子比热可以略去不计.

26.24 参照题 26.23. 银的德拜温度是 210K，求出使银的电子摩尔比热 C_{Ve} 和格点摩尔比热 C_V 相等时的温度. 这个平衡在低温下发生，所以德拜理论结果可以取作

$$C_V = \frac{12\pi^4R}{5}\left(\frac{T}{T_d}\right)^3$$

(见题 26.18)

解 ☞ 令 C_V 和 C_{Ve} 相等，有

$$\frac{12\pi^4 R}{5}\left(\frac{T}{T_d}\right)^3 = \frac{R\pi^2 kT}{2E_{f0}}$$

$$T = \left(\frac{5kT_d^3}{24\pi^2 E_{f0}}\right)^{1/2} = \left[\frac{5(8.62\times10^{-5}\mathrm{eV/K})(210\mathrm{K})^3}{24\pi^2(5.5\mathrm{eV})}\right]^{1/2} = 1.75\mathrm{K}$$

这个结果表示只有在极低温度下才需要考虑电子热传导.

26.8 量子力学理想气体

对于理想气体是指气体分子间无相互作用.但是理想气可以由费米子或玻色子组成，它们必须用量子统计观点分析.

如同所预期的，在高温时，量子力学的结果转化为经典力学的结果.当温度趋于绝对零度时，量子力学分析终究显示出来了与经典力学所预期的显著的不同.例如，对于在低温但不是绝对零度的玻色气，理论指出全部粒子都在最低能态，即所谓的玻色-爱因斯坦凝聚现象(题26.33).H_2 和氦是服从玻色-爱因斯坦统计的气体，原子氢是服从费米-狄拉克统计的气体.

例题详解

26.25 体积为 V 的容器中有玻色气体，其玻色子的数目为固定的 N.证明 α 是温度 T 的严格意义下的递增函数.

解 ☞ 归一化条件是

$$N = \int \mathrm{d}n_E = \int_0^\infty F_{BEg}(E)\mathrm{d}E = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{E^{1/2}\mathrm{d}E}{\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}^{E/kT}-1}$$

这里态密度 $g(E)$ 在题 26.7 中得到，利用变量 $q=E/kT$ 重写这个表达式，得到

$$N = \frac{2\pi V(2mkT)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{q^{1/2}\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}^q - 1} \tag{1}$$

而这个方程隐含地定义 α 作为 T 的函数.当 T 增加时，右方与积分相乘的因子增加.于是，因为 N 是固定的，积分值减小，这表示 α 增加.因此 α 是 T 的严格递增函数.

注意因为 N 是有限的，积分必须总是收敛的，所以 α 总是非负的.

26.26 参照题26.25.对于给定的粒子数密度 N/V，求出与玻色-爱因斯坦统计相洽的玻色气的最低温度.

解 ☞ 因为从题 26.25，当温度减小时 α 随之减小，但不会为负值，当 $\alpha=0$ 时即得到最小温度 T_0，从题 25.25 的式(1)

$$N = \frac{2\pi V(2mkT_0)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{q^{1/2}\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^q - 1}$$

从式(26.5)其中积分有值

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(2.61)$$

代入这个数值并且解出 T_0，我们得到

$$T_0 = \frac{(hc)^2(2.61)^{-2/3}}{2\pi(mc^2)k}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} = \frac{(12.4\times10^{-7}\mathrm{eV\cdot m})^2(2.61)^{-2/3}}{2\pi(mc^2)(8.62\times10^{-5}\mathrm{eV/K})}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$= (1.50\times10^{-9}\mathrm{eV\cdot K\cdot m^2})\frac{(N/V)^{2/3}}{mc^2}$$

当 $T\approx T_0$ 绝大多数无相互作用玻色子处于最低($E=0$)态，并且这个系统可以说是处于凝聚态.这个现象称为玻色-爱因斯坦凝聚.

26.27 求出题 26.25 中的玻色气体的总能量.

解 ☞ 利用变数代换 $q=E/kT$ 和(26.4)，

$$E_T = \int E\mathrm{d}n_E = \int_0^\infty EF_{BE}g(E)\mathrm{d}E = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{E^{3/2}\mathrm{d}E}{\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}^{E/kT}-1}$$

$$= \frac{2\pi V(2m)^{3/2}(kT)^{5/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{q^{3/2}\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}^q - 1} = \frac{3V(2\pi mkT)^{3/2}kT}{2h^3}\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{n^{5/2}}$$

$$= \frac{3V(2\pi mkT)^{3/2}kT}{2h^3}\sum_{n=1}^\infty \frac{Z^n}{n^{5/2}}$$

这里 $Z = \mathrm{e}^{-\alpha}$.

26.28　考虑体积为 V 的容器中有 N 个自旋$\frac{1}{2}$的费米子组成的气体. 证明 α 是温度 T 的严格递增函数.

解　☞ 从题 26.9, 归一化条件是

$$N = \int \mathrm{d}n_E = 2\int_0^\infty F_{FD}g(E)\mathrm{d}E = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{E^{1/2}\mathrm{d}E}{\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}^{E/kT} + 1}$$

$$= \frac{4\pi V(2mkT)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{q^{1/2}\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}^q + 1}$$

这里 $q = E/kT$. 这里所得的结果仿照题 26.25 的讨论导出.

对于费米-狄拉克分布, α 可以为是负值. 可以看到 α 也随系统中的费米子的质量增加而单调递增. 需要注意, 在室温($T \approx 300\mathrm{K}$), 一个电子"气"就出现了与极低温情况下本质上相同的量子行为; 而当气体由分子组成时, 分子的质量大约为电子质量的两千倍, 在室温下出现的是接近于经典的行为.

26.29　求出题 26.28 中费米系统的总能量, 设 $\alpha \geqslant 0$.

解　☞ 利用式(26.4)求得总能量 E_T 是

$$E_T = \int E\,\mathrm{d}n_E = 2\int_0^\infty EF_{FD}g(E)\mathrm{d}E$$

$$= \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{E^{3/2}\mathrm{d}E}{\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}^{E/kT} + 1} = \frac{4\pi V(2mkT)^{3/2}kT}{h^3}\int_0^\infty \frac{q^{3/2}\mathrm{d}q}{\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}^q + 1}$$

$$= \frac{4\pi V(2mkT)^{3/2}kT}{h^3}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{n^{5/2}}$$

$$= \frac{3V(2\pi mkT)^{3/2}kT}{h^3}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n^{5/2}}$$

这里 $Z = \mathrm{e}^{-\alpha}$.

26.30　对于题 26.25 和 26.28 的玻色气和费米气, 求出它们在高温 $T \gg 0\mathrm{K}$ 时每个粒子的平均动能.

解　☞ 利用式(26.4)去求出对于这两种气体的 N 的积分, 并且利用在题 26.27 和 26.29 求出的关于 E_T 的表达式, 我们有

$$E_{\mathrm{avg}} = \frac{E_T}{N} = \frac{3}{2}kT\,\frac{\sum_{n=1}^\infty \varepsilon^{n+1}\frac{Z^n}{n^{5/2}}}{\sum_{n=1}^\infty \varepsilon^{n+1}\frac{Z^n}{n^{3/2}}}$$

这里 $Z = \mathrm{e}^{-\alpha}$, 对于玻色子 $\varepsilon = +1$, 而对于费米子 $\varepsilon = -1$. 在高温极限下, $\alpha \to \infty$(题 26.25 和 26.28), 因此 $Z \to 0$. 于是在每个累加号中只保留前两项, 消去共同的因子 $\varepsilon^2 Z$, 我们得到

$$E_{\mathrm{avg}} \approx \frac{3}{2}kT\left(\frac{1 + \varepsilon Z/2^{5/2}}{1 + \varepsilon Z/2^{3/2}}\right) \approx \frac{3}{2}kT\left(1 + \varepsilon\frac{Z}{2^{5/2}} - \varepsilon\frac{Z}{2^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{3}{2}kT\left(1 - \varepsilon\frac{Z}{2^{5/2}}\right) = \frac{3}{2}kT\left(1 - \varepsilon\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{2^{5/2}}\right)$$

从这里看到在高温时, 两种气体的 E_{avg}渐近地等于经典值$\frac{3}{2}kT$. 对经典结果的一阶修正具有同样的大小, 但是对于费米子, 每个粒子的平均能量比经典结果要高, 而对于玻色子比起经典结果要低.

26.31　对于可逆过程, 热力学第一定律, $\mathrm{d}E_T = \mathrm{d}Q - p\mathrm{d}V$, 而压力 p 可以记作

$$p = -\left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_Q^*$$

用 E_T 写出量子力学气体的压力表达式.

解 ☞ 回忆题 26.6,在边长为 l 的三维立方体中的能级为

$$E_i = \frac{h^2}{8ml^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{h^2}{8mV^{2/3}}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1)$$

由于简并,对于一个给定的 E_i 有相当数量的态(n_x, n_y, n_z)(见题 26.6).设 n_{ij}代表能级E_i 的第j 个态的粒子数.于是系统的总能量为

$$E_T = \sum_i \sum_j E_i n_{ij}$$

从这里得到

$$\mathrm{d}E_T = \sum_i \sum_j E_i \mathrm{d}n_{ij} + \sum_i \sum_j n_{ij} \mathrm{d}E_i$$

因为 E_i 与系统的大小有关,第二项 $\sum_i \sum_j n_{ij} \mathrm{d}E_i$ 对应于由于改变系统的大小或体积而对它所作的功.于是第一项必然是系统所吸收的热:

$$\mathrm{d}Q = \sum_i \sum_j E_i \mathrm{d}n_{ij}$$

换句话说,系统中的热流对应着占据数 n_{ij}的改变.如果 Q=常数,于是 $\mathrm{d}Q=0$,我们有

$$p = -\left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_Q = -\sum_i \sum_j n_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial V}$$

但是,从式(1),

$$\frac{\partial E_i}{\partial V} = -\frac{2}{3}\frac{h^2}{8mV^{5/3}}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = -\frac{2}{3V}E_i$$

所以

$$p = \frac{2}{3V}\sum_i \sum_j n_{ij} E_i = \frac{2}{3}\frac{E_T}{V}$$

这个关系在形式等于由方程(23.5)所给出的经典结果.

26.32 参照题 26.30 和 26.31.考虑到气体的量子力学性质,求出对经典理想气体规律 $pV = NkT$ 在高温时的一阶修正.

解 ☞ 从题 26.30.

$$E_T = NE_{\mathrm{avg}} = \frac{3}{2}NkT\left(1 - \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{2^{5/2}}\right)$$

这里

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{对于玻色气} \\ -1, & \text{对于费米气} \end{cases}$$

将它代入题 26.31 的结果中,我们得到

$$pV = NkT\left(1 - \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{2^{5/2}}\right)$$

26.33 参照题 26.21 和 26.31.求出在极低温时理想自旋-$\frac{1}{2}$费米气的压力的表达式.

解 ☞ 从问题 26.21,对于在低温时的自旋-$\frac{1}{2}$费米子系统

$$E_T = \frac{3}{5}NE_{f0}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]$$

将其代入题 26.31 的结果中,我们有

$$p = \frac{2}{5}\frac{NE_{f0}}{V}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{f0}}\right)^2\right]$$

这个结果表示当 $T \to 0\mathrm{K}$,费米气的压力趋近于一个有限值.这个零点压力出现的原因是如同题

---

* 应为 $p = -\left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_S$,$S$ 是系统的熵.下面还有类似的情况.——译者注

26.11 所讨论：由于泡利不相容原理的结果，即使是在 0K，费米子也有有限的能量.

26.9　量子分布函数的推导

下面的已解问题指出量子分布函数是怎样推导出来的.

例题详解

26.34　对于费米子系统中的一个给定能级 E_i，有 g_i 个状态具有这个能量(即 E_i 具有 g_i 阶简并度). 因为按照泡利不相容原理，每一个态中不能有多于 1 个的粒子，因此占上述能级的最大费米子数是 g_i. 现有 N 个全同的费米子分别分布在能级 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 之上，而第 i 个能级的粒子数 $n_i \ll g_i$ $(n_1 + n_2 + \cdots = N)$，求出这种分布的各种可能的方式数.

解　☞ 因为粒子是相互不可区分的，在 E_1 分布 n_1 粒子只有一种方式. 其次，当 E_1 中有 g_1 个态，我们挑出由 n_1 个粒子所充填的 n_1 个态，这种做法共有

$$\binom{g_1}{n_1} = \frac{g_1!}{n_1!(g_1 - n_1)!}$$

种不同方式. 逐个讨论，充填 E_2 中各态的不同方式是

$$\binom{g_2}{n_2} = \frac{g_2!}{n_2!(g_2 - n_2)!}$$

等等. 于是，总的方式数是

$$X = 1 \times \binom{g_1}{n_1}\binom{g_2}{n_2}\cdots = \frac{g_1!}{n_1!(g_1 - n_1)!}\,\frac{g_2!}{n_2!(g_2 - n_2)!}\cdots \tag{1}$$

26.35　参照题 26.34，设粒子总数和总能量保持不变，求出最概然分布.

解　☞ 最概然分布是指可实现的最大方式数. 于是我们必须在约束条件

$$\sum_i n_i = N = \text{常数}, \quad \sum_i E_i n_i = E_T = \text{常数}$$

之下，求出题 26.34 中的函数 $X(n_1, n_2, \cdots)$ 的最大值.(附加约束 $n_i \leqslant g_i$ 可以略去，因为我们即将知道，在取得极大值时这些条件满足.)过渡到连续情况，对函数

$$\ln \frac{X}{g_1!\,g_2!\cdots}$$

用斯特令公式，并且用拉格朗日乘子法，一切如同在问题 25.16 中所讨论的一样，我们得到条件

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha}e^{\beta E_i} + 1}$$

因为 n_i 是能量为 E_i 的费米子数，而 g_i 是能量为 E_i 的状态数，n_i/g_i 是一个费米子在能量 E_i 的一个状态上的平均费米子数；即 n_i/g_i 是费米-狄拉克分布函数 F_{FD}：

$$F_{FD} = \frac{1}{e^{\alpha}e^{\beta E_i} + 1}$$

26.36　整数自旋粒子(玻色子)不服从泡利不相容原理，所以在给定态中可以找到任意数目的玻色子. 假定在能量 E_i 上有 g_i 个态. 设有 N 个全同的不可区分的玻色子分布在能级 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 上，在第 i 个能级上有 n_i 个粒子，求出这种分布方式的数目.

解　☞ 首先考虑一个能级 E_i，g_i 个态，n_i 个粒子. 这个能级可以画成有 n_i 个粒排成一行，由任意插入的 $g_i - 1$ 条竖线而分属 g_i 个态(例如参见图 26-5). 暂时将粒子看成是可区分的，这时若将 n_i 个粒子放入 g_i 个态中并且每个态中的粒子数不加限制，其可能不同的方式数等于 $n_i + g_i - 1$ 个的粒子加竖线可能置换的不同方式数除以 $g_i - 1$ 条线可以置换的不同方式数 $(g_i - 1)!$：

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{(g_i - 1)!}$$

(因为在我们的图象中，两条划分线的交换对应着同一个情况)但是粒子实际是相互不可区分的，所

以两个粒子的交换其结果是同样的分布，所以上述表达式必须除以 $n_1!$，这是粒子可能交换的不同方式数，这样得到在第 i 个能级的实际上的不同方式数

$$\frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$$

于是，若在能级 $E_1, E_2, \cdots$ 上的状态数是 $g_1, g_2, \cdots$ 而各能级的粒子数分别为 $n_1, n_2, \cdots$，这时总的不同方式数是

$$X=\frac{(n_1+g_1-1)!}{n_1!(g_1-1)!}\frac{(n_2+g_2-1)!}{n_2!(g_2-1)!}\cdots \tag{1}$$

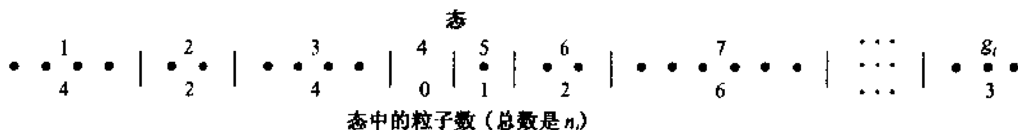


图 26-5

26.37 在题 26.36 中，如果粒子数和总能量保持不变，求出最概然分布．

解 ☞ 如同题 25.16 和 26.35 的严格处理在约束条件

$$\sum_i n_i = N = 常数 \qquad \sum_i E_i n_i = E_T = 常数$$

下，求出题 26.36 中的 X 的极大值，或者更便当些是求出函数

$$\ln\{[(g_1-1)!(g_2-1)!\cdots]X\}$$

的极大值．取得极大值的条件是

$$\frac{n_i}{n_i+g_i-1}=e^{-\alpha}e^{-\beta E_i}$$

如果 $n_i+g_i \gg 1$，我们有

$$\frac{n_i}{n_i+g_i}=e^{-\alpha}e^{-\beta E_i} \quad 或 \quad n_i=\frac{g_i}{e^{\alpha}e^{\beta E_i}-1}$$

因为 n_i 是能量为 E_i 的玻色子数目，g_i 是能量为 E_i 的状态数目，n_i/g_i 是在能量为 E_i 的一个状态中的玻色子平均数，即 n_i/g_i 是玻色-爱因斯坦分布函数 F_{BE}：

$$F_{BE}=\frac{1}{e^{\alpha}e^{\beta E_i}-1}$$

26.38 证明不具有固定粒子数的玻色子系统（例如，黑体空腔中的光子系统）具有 $\alpha=0$ 的玻色-爱因斯坦分布．

解 ☞ 在题 26.37 的推导中，令 $\alpha=0$ 等价于取消约束

$$\sum_i n_i = N = 常数$$

补充习题

黑体辐射

26.39 在体积 $V=l^3$ 的立方空腔内，在 $E \to E+dE$ 的能量区间内，光子的态密度是多少？

答案：$8\pi VE^2/(hc)^3$

26.40 由黑体辐射出在单位波长内能量的总和是多少？

答案：$\dfrac{8\pi Vhc}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$

26.41 将图 26-1 改画成 $F(\lambda)$ 相对于 λ 的图形．

26.42 重复题 26.5，在红外波长 25,000Å 上而带宽为 50Å．

答案：33.8

金属的自由电子理论

26.43 在三维立方无穷势阱内的 $57E_0$ 的简并度是多少？

答案:6

26.44 对于立方三维无穷势阱,在动量区间 $p \to p + dp$ 范围内的态密度是多少?

答案:$4\pi l^3 p^2/h^3$

26.45 在 $T=0\text{K}$,用金属中电子气的费米能所表达出的均方根速率是多少?

答案:$v(\text{m/s}) = (4.59\times 10^5)\sqrt{E_{f0}(\text{eV})}$

26.46 在题 26.12 的(1)的展开式中的下一项是什么?

答案:$\dfrac{7}{640}\left(\dfrac{\pi kT}{E_f}\right)^4$

26.47 在 $T=300\text{K}$ 发现某种金属的费米能比起 0K 时的值少 $1.2\times 10^{-4}\text{eV}$.这个金属在 0K 时费米能是多少?

答案:4.58eV

26.48 对于某种金属,其功函数为 3.4eV 而平均静电势能是 11.2eV.金属的费米能是多少?

答案:7.8eV

26.49 在 $T=0\text{K}$,在金属中的电子气的最大速率和均方根速率之比是多少?

答案:1.29

晶体的比热

26.50 在晶体中,在波长 $\lambda \to \lambda + d\lambda$ 波长范围内的态密度是什么?

答案:$4\pi V\left(\dfrac{2}{v_t^3}+\dfrac{1}{v_l^3}\right)\dfrac{c^3}{\lambda^4}$

26.51 参照题 26.23.对于银当它的电子摩尔比热 C_{V_e}是格点摩尔比热的 5% 时,求出温度.

答案:7.83K

26.52 在两态量子力学系统中,能级 $E_1=0$ 而 $E_2=\varepsilon$,在能量为 E 的态中找到一个粒子的概率正比于玻尔兹曼因子 $e^{-E/kT}$.求出 N 粒子系统的总能量.

答案:$E_T = \dfrac{N\varepsilon e^{-\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}}$

26.53 对于题 26.52 中的系统,找出常体积时的比热.

答案:$C_V = \dfrac{Nk(\varepsilon/kT)^2 e^{-\varepsilon/kT}}{(1+e^{-\varepsilon/kT})^2}$

26.54 求出题 26.53 中的 C_V 在低温和高温下的极限.

答案:0 和 0

量子力学理想气体

26.55 题 26.25 中的玻色气的方均根速率是什么?

答案:$\left(\dfrac{3kT}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-n\alpha}}{n^{5/2}}\Big/\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-n\alpha}}{n^{3/2}}\right)^{1/2}$

26.56 液体^{4}He,其密度是 $0.146\times 10^3\text{kg/m}^3$,求出它的温度 T_0(参见题 26.26)

答案:3.16K(虽然液氦不是真的没有相互作用的玻色气,近似计算给出接近于 2.2K 的结果,在这个温度上观察到基底态占据数快速增加,它对应于从正常流体到超流的转变.见 27.2 节.)

26.57 设 $\alpha \geqslant 0$,问题 26.28 中的费米气的方均根速率是什么?

答案:$\left[\dfrac{3kT}{m}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-n\alpha}}{n^{5/2}}\Big/\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-n\alpha}}{n^{3/2}}\right]^{1/2}$

26.58 求出银中电子气的零点压力($E_{f0}=5.5\text{eV}$,密度 $=10.5\times 10^3\text{kg/m}^3$).

答案:$2.06\times 10^{10}\text{N/m}^2 \approx 10^5$ 大气压.

第 27 章 固　　体

27.1 固体的能带理论

在 26.6 节所讨论的金属的自由电子理论并不能阐明为什么某些材料是良性电导体，而另外一些绝缘体是不良导体；还有为什么某些材料称为半导体，其导电性质某种程度上介于前两者之间. 一个称为固体能带理论的更为成功的理论阐明了为什么固体的电阻比值可以大到 10^{30}.

固体可以认为是孤立的单个原子放在一起的结果. 任何单个原子都有大量的离散能级，它们可以被原子的电子所占据，如图 27-1(a)所示. 正常情况下电子存在于基底态中，占有最低底层的能级. 当然，有可能将电子激发到较高能级. 通常只有最高能量的电子，即价电子，参与这些激发. 先考虑两个原子的组合. 如果两个原子之间没有相互作用，每一个能级的数值与孤立的单个原子的相同，而指定能量的能级数加倍，如图 27-1(b)所示. 但对于有相互作用的情况，每一个原先的单个能级要分裂为两个能级，见图 27-1(c). 与此类似，如果有更多的原子放在一起，这时对每一个能级有大量的分裂，一个分裂对应于一个参与原子. 图 27-1(d)表示当 5 个原子放在一起时能级的分裂.

因为在固体中有 10^{23}原子/cm^3 数量级，每一个原先在一个孤立原子时的单能级将分裂成非常多的部分. 因为能级的值仍旧近似是相同的，聚集大量有相互作用的原子的净效应是形成一个能带，其中有实际上可看成是连续的能级，它们之间由其中不存在电子态的能隙隔开，如图 27-1(e)所示.

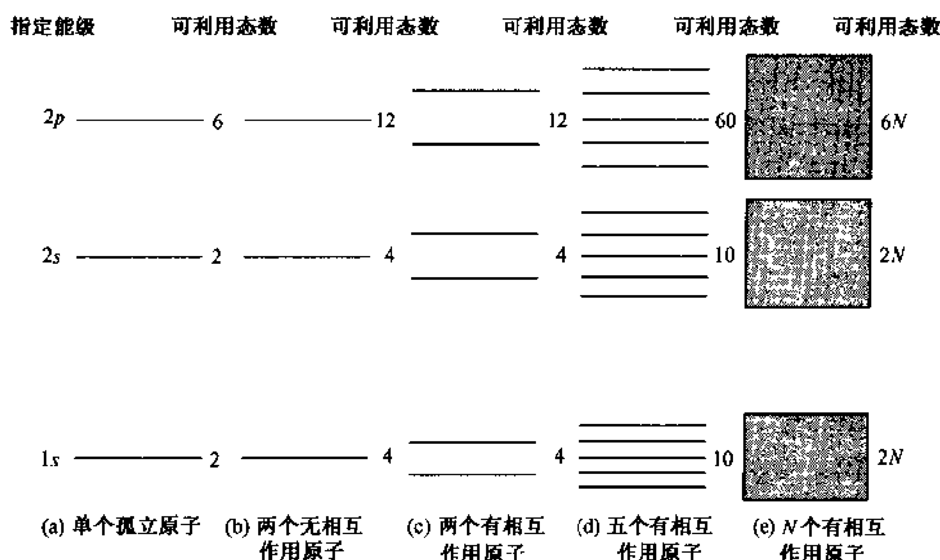


图 27-1

电子占据可供利用能带的方式由泡利不相容原理支配. 带中填充电子的方式与多电子原子中填充电子态的方式相同(第 15 章). 作为一个例子，$_{11}$Na 填满直到 3s 能级为止的全部能级，在 3s 能级上有一个电子，而电子填充方式是 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. 在 3s 能级上可容纳两个电子，其中仅填充了一半.

类似地，固体能带也可以被填充，部分填充或者空着，见图 27-2. 被价电子占据的最高能带和在它紧上方的未被占据的能带确定了晶体的导电性质. 如果包含价电子的能带已被填满，

则称它为价带；而下一个较高的带称为导带；如果包含价电子的能带未被填满，称它为导带. 一个良导体有接近充填一半的导带[图 27-2(a)]，或者导带与下一个较高的能带重叠[图 27-2(b)]. 在这样的情况下，很容易提升一个价电子到较高的能级，所以这些电子容易从电场中获得能量以参与导电.

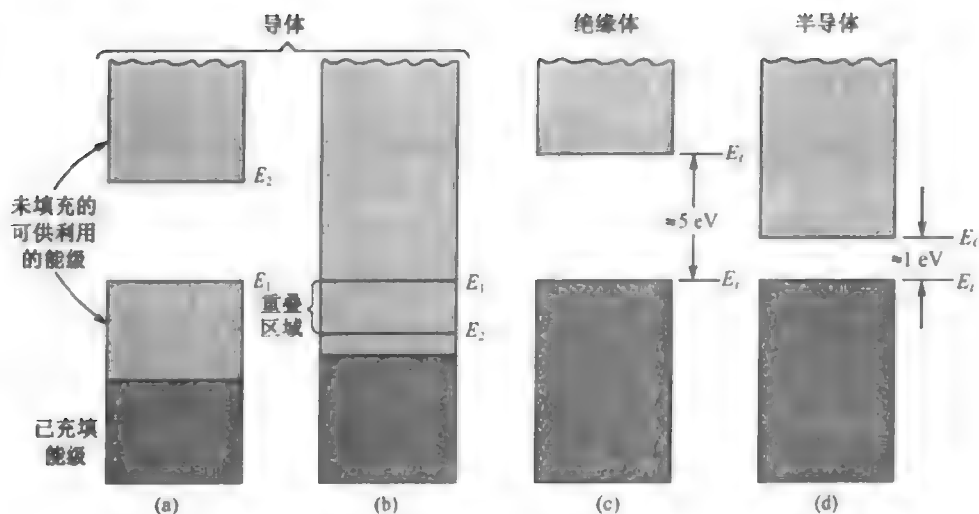


图 27-2

绝缘材料有填满的价带，而它与导带之间的能隙是大的[图 27-2(c)]. 作为一个结果，电子不容易从电场中获得能量，所以不能参与导电.

某些材料与绝缘体一样也有填满的价带，但到导带有一个小的能隙[图 27-2(d)]. 在 $T=0$K，价带完全填满而导带是空的，所以材料像绝缘体. 在室温下，毕竟有些电子吸收了足够的热能使其处于导带，从而可以参与导电. 此外，这些电子离去留下未充填的"空穴"，价带上的其他电子可以导电时移向此处. 电子激发移向这些空穴具有净的支撑导电的正电荷效应.

刚才讨论的半导体称为内禀半导体. 但有可能在材料引入一定的杂质，以控制导电的是(负的)电子或者(正的)空穴载荷子. 这种"改性的"半导体称为非本征的半导体，它们是半导体器件的基础. 如果主要载荷子是电子，这个材料称为 n 型("负的")半导体；如果空穴是主要载荷子，材料称为是 p 型("正的")半导体.

例 题 详 解

27.1 金属中电流导电的模型是认为金属是包含有电子气的，而容器金属的格点骨架. 当电压作用到金属上，随机方式运动的电子在外加的电场方向加速，而与重的格点离子经过多次碰撞之后获得一个净漂移速度 v_d，其结果是有一个净电流. 对于单位体积内有 n 个电子的材料，其中电子的平均自由长度为 λ，而因热激发而得到的平均速度为 $\bar{v}$，求出电阻率. 为简单起见，设 V 为一个箱子的体积，其横断面为 A 和长度为 l.

解 ☞ 如果电压 ϕ 沿着长度 l 方向加上，作用在电子上的力是

$$F = eE = e\frac{\phi}{l}$$

而电子的加速度是

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{e\phi}{m_e l}$$

电子与晶格碰撞的平均时间是 $t=\lambda/\bar{v}$. 在这段时间内在随机速度之上附加了一个速度，它就是漂移速度

$$v_d = at = \frac{e\phi\lambda}{m_e l \bar{v}}\ ^{*}$$

(更严格一些说,$v_d = at'$,这里 t'是到最后一次碰撞为止的平均时间.但是在碰撞是独立的随机事件的假设,可以证明相继碰撞之间的时间具有指数分布.于是可以证明到最后一次碰撞为止的平均时间等于碰撞之间的平均时间,即 $t' = t$.)

电流 I 是输运电荷通过横断面 A 的速率.电子的随机运动不会产生净输运,因此,

$$I = (ne)Av_d\ ^{**} = \frac{ne^2\lambda A}{m_e l \bar{v}}\phi$$

此公式即是欧姆定律 $I = \phi/R$.定义材料的电阻率 ρ 为

$$R = \rho\frac{l}{A}$$

我们有

$$\rho = \frac{m_e\bar{v}}{ne^2\lambda}$$

27.2 参照题27.1.估计银的电阻率($A = 108$),银的密度是 $10.5\times10^3\text{kg/m}^3$,假定对于导电来说每个原子贡献一个电子(价电子).为了估计的目的,取 λ 等于原子间隔 d 的100倍,并且 v_d 等于与费米能 $E_{f0} = 5.5\text{eV}$ 相对应的速度.

解 ☞ 对应于费米能的速度是

$$v_f = \left(\frac{2E_{f0}}{m_e c^2}\right)^{1/2} c = \left(\frac{2\times5.5\text{eV}}{0.511\times10^6\text{eV}}\right)^{1/2}(3\times10^8\text{m/s}) = 1.39\times10^6\text{m/s}$$

因为每一个原子贡献一个电子,原子密度与电子密度相等:

$$n = \frac{(6.02\times10^{26}\ 原子/\text{kmol})(10.5\times10^3\text{kg/m}^3)}{108\text{kg/kmol}}\cdot\left(\frac{1电子}{原子}\right) = 5.85\times10^{28}\ \frac{电子}{\text{m}^3}$$

如果每一个原于的体积近似地取为 d^3,我们于是有

$$\frac{\lambda}{100} = d = \left(\frac{1}{5.85\times10^{28}\text{m}^{-3}}\right)^{1/3} = 2.58\times10^{-10}\text{m}$$

或

$$\lambda = 2.58\times10^{-8}\text{m}$$

利用题27.1的结果,我们有***

$$\rho = \frac{m_e v_f}{e^2 n\lambda} = \frac{(9.11\times10^{-31}\text{kg})(1.39\times10^6\text{m/s})}{(1.6\times10^{-19}\text{C})^2(5.85\times10^{28}\text{m}^{-3})(2.58\times10^{-8}\text{m})}$$
$$= 3.29\times10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$$

实验上银的电阻率是从0℃的 $1.5\times10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$ 变化到800℃的 $6.87\times10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$.于是可以看到我们的粗略近似与所观察到的结果相当地一致.

27.3 如同在题27.2中一样,估计硅的电阻率($A = 28$),它的密度是 $2.42\times10^3\text{kg/m}^3$,原子价为2.设硅的费米能大约为5eV.

解 ☞ 处理如同题27.2,我们得到

$$v_f = \left(\frac{2E_{f0}}{m_e c^2}\right)^{1/2} c = \left(\frac{2\times5\text{eV}}{0.511\times10^6\text{eV}}\right)^{1/2}(3\times10^8\text{m/s}) = 13.3\times10^5\text{m/s}$$

$$n = \frac{\left(6.02\times10^{26}\ \frac{原子}{\text{kmol}}\right)(2.42\times10^3\text{kg/m}^3)}{28\text{kg/kmol}}\left(\frac{2电子}{原子}\right)$$
$$= 1.04\times10^{29}\ \frac{电子}{\text{m}^3}$$

每 m^3 的原子数为相应的电子数的一半,并且如果原子体积近似地取为 d^3,我们有

---

* 这是最终获得的漂移速度,并非是电子的平均漂移速度 $\bar{v}_d$,我们有 $\bar{v}_d = \frac{1}{2}v_d$.——译者注

** 式中 v_d 应改为 $\bar{v}_d = \frac{1}{2}v_d$.

*** 按照问题27.1的改正后结果则为 $6.58\times10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$.

$$\lambda = 100d = 100\left[\frac{1}{\frac{1}{2}(1.04\times 10^{29}\mathrm{m}^{-3})}\right]^{1/3} = 2.68\times 10^{-8}\mathrm{m}$$

于是电阻率是

$$\rho = \frac{m_e v_f}{e^2 n\lambda} = \frac{(9.11\times 10^{-31}\mathrm{kg})(13.3\times 10^5\mathrm{m/s})}{(1.6\times 10^{-19}\mathrm{C})^2(1.04\times 10^{29}/\mathrm{m}^3)(2.68\times 10^{-8}\mathrm{m})}$$
$$= 1.7\times 10^{-8}\Omega\cdot\mathrm{m}$$

在室温下，硅的电阻率大约是 $10^3\Omega\cdot\mathrm{m}$，比由这个计算得出来的数值要大得多．这个差异的原因在于我们假定了价电子参与导电．但是，硅是半导体，所以在价带和导带之间有能隙．只有能量足够大的电子才可处于导带之中，只有这些电子才对导电有贡献．

27.4 证明在内禀半导体中，能量在 E 和 $E+\mathrm{d}E$ 之间的空穴数目是

$$\mathrm{d}n_h = (1-F_{FD})g(E)\mathrm{d}E$$

这里 $g(E)$ 是价带中的态密度．

解 在 $T=0\mathrm{K}$，内禀半导体中的价带被填满而在导带中没有电子．当 $T>0\mathrm{K}$，一些激发到了导带，而它们的数目等于价带中出现的空穴的数目．图 27-3 是一个例证．洞数目的分布函数见图 27-3(b)的阴影区．于是能量在 E 到 $E+\mathrm{d}E$ 之间的空穴数目是

$$\mathrm{d}n_h = (1-F_{FD})g(E)\mathrm{d}E$$

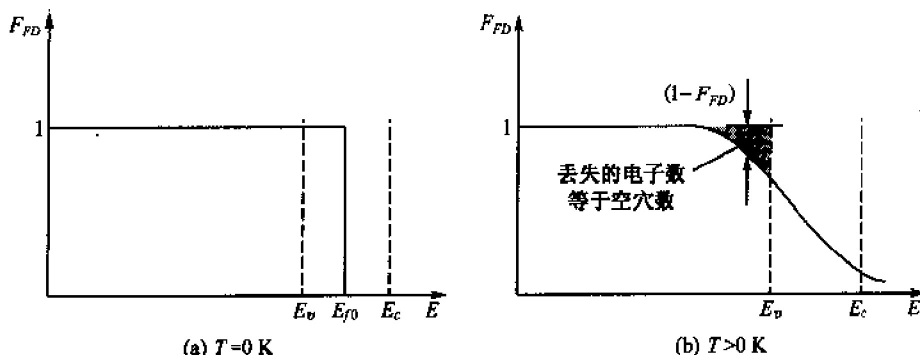


图 27-3

27.5 对于半导体，可以证明，在 $T=0$ 时，在待充填的导带底部的紧上方范围以及价带顶部的紧下方范围，态密度函数 $g(E)$ 相对于能隙中点 E_m 近似地对称，参见图 27-4(b)（当然在能隙自身上的态密度为零.）证明对于有限温度费米能量将在能隙的中点．

解 因为对于在导带中的每一个电子相应在价带中有一个空穴．在导带中的电子总数 N_e 必须等于价带中的空穴总数 N_h．在导带中能量在 E 到 $E+\mathrm{d}E$ 之间的电子数 $\mathrm{d}n_e$ 是

$$\mathrm{d}n_e = F_{FD}g(E)\mathrm{d}E$$

而在价带中，能量在 E' 和 $E'+\mathrm{d}E'$ 之间的空穴数 $\mathrm{d}n_h$ 是（见问题 27.4）

$$\mathrm{d}n_h = (1-F_{FD})g(E')\mathrm{d}E'$$

于是

$$\int_{E_c}^{E_c+E_v} F_{FD}(E)g(E)\mathrm{d}E = \int_0^{E_v}[1-F_{FD}(E')]g(E')\mathrm{d}E'$$

我们取左方的上限是 E_c+E_v，因为当 $E'<0$ 时 $g(E')=0$，所以由对称性当 $E>E_c+E_v$ 时 $g(E)=0$．在左方和右方的积分中分别更换变数

$$x = E-E_m,\qquad x = E_m-E'$$

我们得到

$$\int_{E_c-E_m}^{E_m} F_{FD}(E_m+x)g(E_m+x)\mathrm{d}x - \int_{E_m-E_v}^{E_m}[1-F_{FD}(E_m-x)]g(E_m-x)\mathrm{d}x$$

但是由于对称性

$$E_c-E_m = E_m-E_v,\qquad g(E_m+x) = g(E_m-x)$$

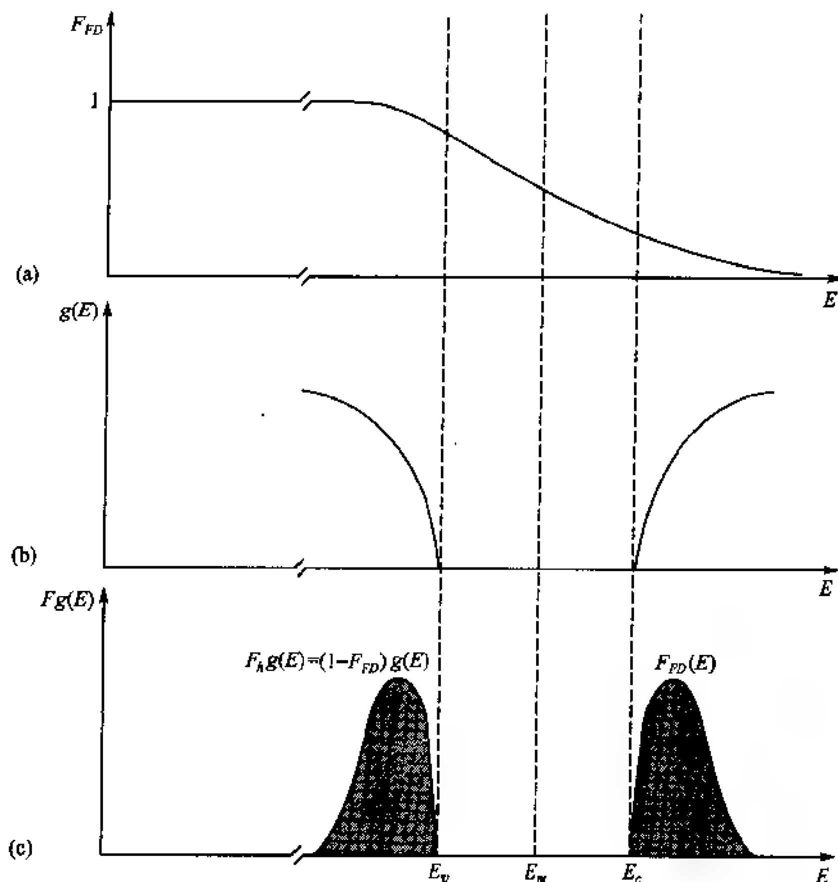


图 27-4

所以

$$\int_{E_c-E_m}^{E_m}\{F_{FD}(E_m+x)-[1-F_{FD}(E_m-x)]\}g(E_m+x)\mathrm{d}x=0 \tag{1}$$

利用 F_{FD}的明显表达式，我们写出花括弧中的量

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{(E_m+x-E_f)/kT}+1}-\left[1-\frac{1}{\mathrm{e}^{(E_m-x-E_f)/kT}+1}\right]=\frac{1}{\mathrm{e}^{(E_m+x-E_f)/kT}+1}-\frac{\mathrm{e}^{(E_m-x-E_f)/kT}}{\mathrm{e}^{(E_m-x-E_f)/kT}+1}$$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{2(E_m-E_f)/kT}}{[\mathrm{e}^{(E_m+x-E_f)/kT}+1][\mathrm{e}^{(E_m-x-E_f)/kT}+1]}$$

现在，在式(1)的被积函数的全程中 $g(E_n+x)$是正的. 可以直接检查，如果 $E_f>E_m$，在花括弧中的量全是正的；并且如果 $E_f<E_m$ 则其中的量全是负的. 在上述两种情况中，(1)中的被积函数都不会变号，因此积分的结果不为零. 因此 $E_f=E_m$

一个更精确的分析证明态密度相对于 E_m 并非严格地对称，所以费米能并不恰好就在能隙的中点. 但是由我们的分析所引进的误差的确很小.

27.6 在题 26.7 中，金属的自由电子理论的态密度是

$$g(E)=\frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}V}{h^3}E^{1/2}$$

假设这个表达式对于在导带中的电子同样适用，但是在右端 E 要换成 $E-E_c$，这里 E_c 是在导带底部的能量. 取在能隙中点的费米能，证明在导带中单位体积随温度 T 的变化规律是

$$n_e=C\mathrm{e}^{-E_g/2kT}$$

这里 $C=2(2\pi m_e kT)^{3/2}/h^3$ 而 $E_g=E_c-E_v$ 是能隙的宽度.

解 在通常温度下 $kT\approx0.026\mathrm{eV}$，所以在导带中 $E-E_f\gg kT$，并且可利用近似表达式

$$F_{FD} = e^{-(E-E_f)/kT}$$

在导带中的电子总数 N_e 于是

$$N_e = \int_{E_c}^{\infty} F_{FD} g(E) dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2} V}{h^3} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} e^{-(E-E_f)/kT} dE$$

或者

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3} e^{-(E_c-E_f)/kT} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} e^{-(E-E_c)/kT} dE$$

利用结果 $E_c - E_f = E_g/2$(题 27.5)并且代进 $u^2 = E - E_c$,我们得到

$$n_e \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3} e^{-E_g/2kT} 2\int_0^{\infty} u^2 e^{-u^2/kT} du = 2\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-E_g/2kT}$$

这里的积分的积出利用了表 25-1($n=2$).

如果在 n_e 的表达式中代进常数值,我们得到

$$n_e = (4.83 \times 10^{21}) T^{3/2} e^{-E_g/2kT} \text{ 电子 /m}^3$$

当 $T = 300\text{K}$, $kT = 0.026\text{eV}$ 并且我们有

$$n_e|_{300\text{K}} = (4.83\times10^{21})(300)^{3/2} e^{-E_g/2(0.026\text{eV})} = (2.51\times10^{25}) e^{-E_g/(0.052\text{eV})} \text{电子/m}^3$$

因为费米能并不恰好在能隙中心,n_e 的表达式并不严格正确. 但是这个表达式对于合理的数量级估计已足够准确.

27.7 参照题 27.6. 估计绝缘体碳($E_g = 5.33\text{eV}$)和半导体硅($E_g = 1.14\text{eV}$)在室温(300K)时导带中的电子密度之比.

解 ☞ 在 300K, $kT = 0.026\text{eV}$.

$$\frac{n_C}{n_{Si}} = e^{-(5.33\text{eV}-1.14\text{eV})/(0.052\text{eV})} \approx 10^{-35}$$

因此绝缘体中的传导单元比起半导体的来说是非常、非常异乎寻常地少,这个说明了为什么即使与半导体相比,绝缘体的电阻率也是如此显著地高.

27.8 载荷子的迁移率定义为 $\mu = v_d/E$,这里 v_d 加上电场 E 之后产生的漂移速度,μ 是加上电场之后载荷子通过材料能力的量度. 从题 27.1 可以看到,我们也可以记 $\mu = e/m\bar{v}$. 在室温时,硅($E_g = 1.1\text{eV}$)的电子迁移率是 $\mu_n = 0.13\text{m}^2/\text{V·s}$,而它的空穴迁移率是 $\mu_p = 0.05\text{m}^2/\text{V·s}$. 求出硅的电导率 $\sigma = 1/\rho$,这里 ρ 是电阻率(见题 27.1).

解 ☞ 电导率有两项贡献,其一来自电子而另一个贡献来自空穴. 于是

$$\sigma = \frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_p} = \frac{e^2 n_n \lambda_n}{m_e \bar{v}_e} + \frac{e^2 n_p \lambda_p}{m_p \bar{v}_p}$$

利用 $\mu = e\lambda/m\bar{v}$,我们可以记

$$\sigma = n_n e \mu_n + n_p e \mu_p$$

从题 27.6 的结果,

$$n_n = n_p = (2.51 \times 10^{25}) e^{-(1.1\text{eV})/(0.052\text{eV})} = 1.6 \times 10^{16} \text{m}^{-3}$$

而

$$\sigma = (1.6 \times 10^{16}\text{m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19}\text{C})(0.13\text{m}^2/\text{V·s} + 0.05\text{m}^2/\text{V·s}) = 4.6 \times 10^{-4}(\Omega\cdot\text{m})^{-1}$$

于是总体电阻率

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 2.2 \times 10^3 \Omega\cdot\text{m}$$

27.9 参照题 27.8. 杂质按照一个杂质原子配 10^{10} 个硅原子的比例加入硅中,一个杂质原子给硅的导带提供一个额外电子. 求出掺杂硅的电导率,设杂质提供的电子的迁移率与原有的电子迁移率相同并且所提供的电子密度比起主体的电子和空穴密度要大得多.

解 ☞ 从题 27.3,硅原子密度是

$$n_{Si} = 5.2 \times 10^{28} \text{ 原子 /m}^3$$

所以捐赠者原子的密度是这个数值与 10^{-10} 相乘,或者

$$n_d = 5.2 \times 10^{18} \text{ 原子 } /\text{m}^3$$

(在题27.8中曾经得到内禀载荷子密度$\approx 10^{16}\text{m}^{-3}$,它比捐赠者密度 n_d.)电导率的一般表达式是

$$\sigma = n_n e\mu_n + n_p e\mu_p$$

这里 n_n 和 n_p 是负的和正的载荷子的密度.因为在密度中以负的载荷捐赠者为主,我们可以记

$$\sigma \approx n_d e\mu_n = (5.2\times10^{18}\text{m}^{-3})(1.6\times10^{-19}\text{C})(0.13\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}) = 0.11(\Omega\cdot\text{m})^{-1}$$

将这个结果与题27.8比较证明非常小的掺杂对半导体的导电性质有重要的影响.实用中的掺杂比是10^{-5}到10^{-10}.

27.10 一根薄带材料,上带有常值电流,放在磁场 B 中,B 的方向与带面垂直,可以看到横跨过带面有可察觉的电位差(这个称为霍尔效应).证明在材料所感应出来的电场 E,电流密度 j,单位体积的载荷子数 n,和磁场 B 之间有关系

$$E = \frac{jB}{qn}$$

这里 q 是载荷子的电荷.

解 ☞ 正载荷子的平衡情况的示意图见图27-5.开始时加上磁场 $\mathbf{B}$,力 $\mathbf{F}_B$ 使得材料的左侧相对于右侧出现了净正电荷.由于这个电荷分离而出现的电场 $\mathbf{E}$ 将给载荷子提供一个力 $\mathbf{F}_E$ 以产生一个平衡状态使得载荷子既不向右也不向左漂移.于是,注意 $\mathbf{v}_d$ 与 $\mathbf{B}$ 垂直,我们有

$$F_E = F_B \quad \text{或} \quad qE = qv_dB \quad \text{或} \quad E = v_dB$$

并且因为 $j = qnv_d$,

$$E = \frac{jB}{qn}$$

这里 q 是载荷子的载荷.

测量 E, j 和 B 使得我们能够确定霍尔系数 $1/qn$.

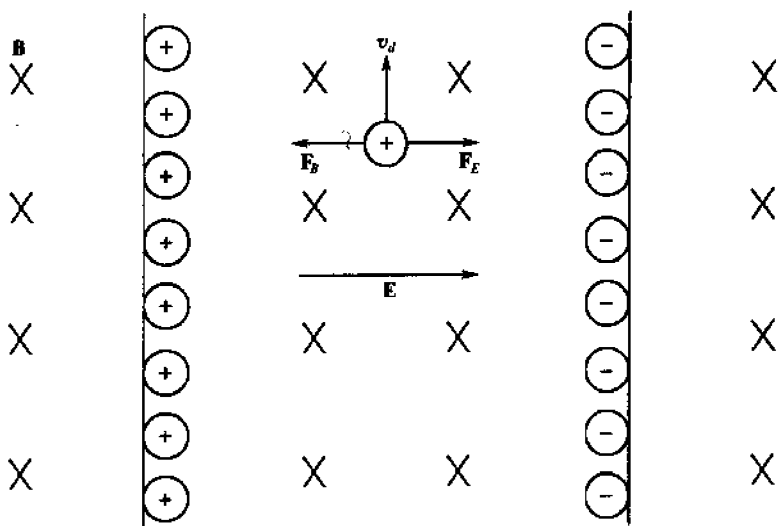


图 27-5

因为电场的取向和对应的电势差取向与载荷子的记号有关,因此可以由霍尔效应确定这个记号.感兴趣的是,虽然在材料中只有电子是自由运动的,人们由找出的霍尔系数知道导电的是正载荷子.它是空穴,或者价带中电子的空缺,它的行为像正载荷子.

补充习题

27.11 在热电子发射中,从金属中逸出电子至少要有能量 $E = E_f + \phi$,这里 E_f 是费米能而 ϕ 是功函数,设 $\phi \gg kT$,求出射出的电子的能量分布.

答案: $Ae^{-E/kT}$

27.12 对于金($A = 197$),电阻率是$2.04\times10^{-8}\Omega\cdot\text{m}$,费米能是5.54eV,而密度是$19.3\times10^3\text{kg/m}^3$.如果每一

个金原子贡献一个自由电子,对于导电电子求出其平均自由长度 λ 和原子间隔 d 之间的比值.

答案:$\lambda/d=161$

27.13　估计在 300K 时锗($E_g=0.7$eV)和硅($E_g=1.1$eV)导带电子密度之比.

答案:$n_{Ge}/n_{Si}=2.2\times10^3$

27.14　一个杂质原子提供一个空穴给硅的价带,掺杂比例是 1 个杂质原子相应于 10^9 个硅原子.设所提供的空穴的迁移率与内禀空穴的迁移率相同($\mu_p=0.05\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$).求出掺杂硅的电导率.

答案:$0.42(\Omega\cdot\text{m})^{-1}$

27.15　在加上杂质后,一个杂质原子对硅的导带捐赠一个额外电子($\mu_n=0.13\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$)测得掺杂硅的电导率为 $0.54(\Omega\cdot\text{m})^{-1}$.确定掺杂比.

答案:10^9 份中占 2 份

27.16　由电子(或空穴)的有效质量 m^* 来描述它的运动是方便的.m^* 的定义是

$$\frac{1}{m^*}=\frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E}{dk^2}$$

这里 k 是波数($k=2\pi/\lambda$).对于自由电子($p=\hbar k$),证明 $m^*=m$.

27.2　超导电性

在 1908 年荷兰物理学家 H. 昂尼斯(Heike Kammerlingh Onnes)成为将氦液化的第一个人,氦在大气压下的沸点是 4.2K.在 1911 年,昂尼斯观察到水银的电阻是温度的函数,并且得到当将它冷却到 4.2K 以下其电阻成为零.昂尼斯因为这个工作获得 1913 年的诺贝尔奖.在此以后,研究了很多元素,并且观察到它们冷却到自身的某个临界温度 T_c 之后,具有零电阻,参见图 27-6, T_c 对于不同的超导体一般有不同的数值.

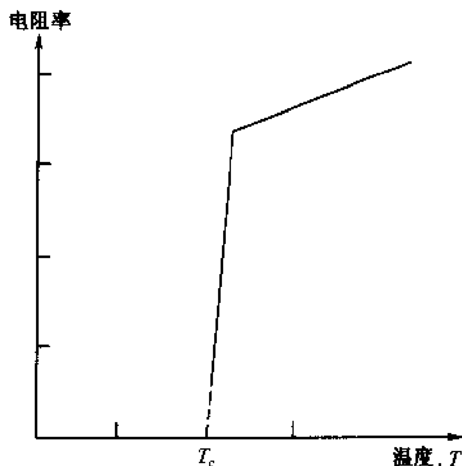


图 27-6

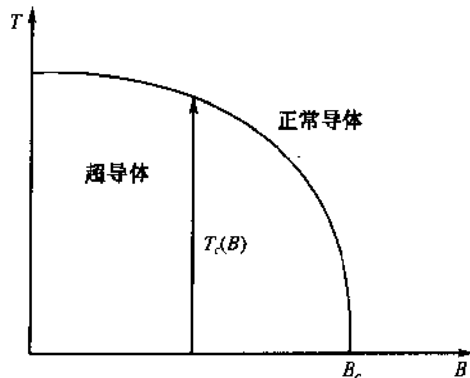


图 27-7

超导体的电阻是真正的零值,所以它是完美的导体.如在超导环中建立起电流,它可以历经数年而无显著的衰减.

所发现的超导材料有化合物,合金,氧化物等,随着新材料的出现,临界温度逐渐缓慢上升,到 1973 年对于 Nd_3Ge 是 23.2K.在 1986 年,IBM 苏黎世实验室的贝德罗兹(J.A.Bednorz)和米勒(K.A.Muller)找到一种镧、钡和铜的氧化物($La_{2-x}Ba_xCuO_4$),它具有大约 30K 那样的高的 T_c,因为这个发现他们后来得到了诺贝尔奖.这个突破引导到一系列以铜的氧化物为基础的新的超导材料,有临界温度高到 125K 的.这些材料特别重要,因为它们的临界温度高于液氮的沸点(77K),所以不再需要用昂贵的液氦去冷却它们.

如果把超导体放到磁场之中,当磁场强度增加,临界温度 T_c 将减小.当磁场加大而超过临界磁场 B_c,则超导状态完全毁坏,并且这时不论温度如何低都不会呈现超导性质.设 T_{c0}是在零磁场下的临界温度,$T_c(B)$与外加磁场 B 之间的关系是

$$T_c(B) = T_{c0}(1 - B/B_c)^{1/2}$$

T_c 相对于 B 的关系曲线见图 27-7. 在曲线之下的 T 值和 B 值时，材料是超导的；而在曲线之外的数值下，材料成为通常的导体.

如果超导体的温度超过较 B_c 小的磁场下的临界温度 T_c，则磁力线进入超导体的内部，如图 27-8(a)所示. 保留磁场不变，但将超导体冷却到 T_c 以下的温度，则材料内部的磁场变为零，如同图 27-8(b)所示. 将磁场从超导体内部排除出去的现象称为迈斯纳效应，是由迈斯纳和奥辛菲德(Oschefeld)在 1933 年发现的. 在迈斯纳效应背后的机制见图 27-8(b)所示. 在超导体表面感应出超导电流. 由这些表面电流在材料内部产生出感应磁场，它与外加磁场方向相反.

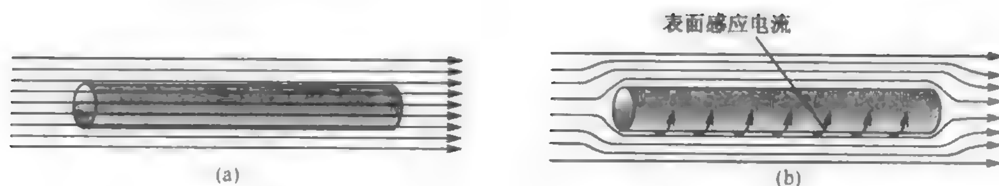


图 27-8

超导体划分为类型 I 和类型 II，与它们如何响应磁场有关. 在类型 I 的超导体中，材料内部的感应磁场完全抵消了外加磁场，其结果是完全排除了磁场. 但是，如果外部磁场的强度大于临界磁场 B_c，材料不再是超导体而转变为通常导体.

类型 II 的超导体有两个不同的临界场强. 在第一个临界场强 B_{c1} 之内的磁场下，类型 II 的超导体其行为如同类型 I 的超导体，将磁场完全排除出去. 当磁场超过 B_{c1}，材料仍旧保持超导行为，等到外加磁场达到第二个临界磁场 B_{c2} 为止，在 B_{c2} 之上将不再有超导电性，而材料成为通常导体. 当外加磁场在 B_{c1} 和 B_{c2} 之间时，这时称为涡态，半导体内部的外磁场将部分地被排除，但并非全部排除. 在类型 II 超导体中的第 2 个临界磁场 B_{c2} 比起典型的类型 I 的超导体的临界磁场 B_c 来要大过 100 倍的量级，这就使得类型 II 的超导体当作能够产生大磁场的超导磁铁来使用.

在发现超导性质之后将近 50 年，在 1957 年巴丁，库珀，和施里弗(BCS)提出了阐明类型 I 超导的量子力学微观理论，他们因此得到了 1972 年的诺贝尔奖.

BCS 理论表明超导电性是由于两个动量相等但方向相反，并且自旋也相反的两个电子的

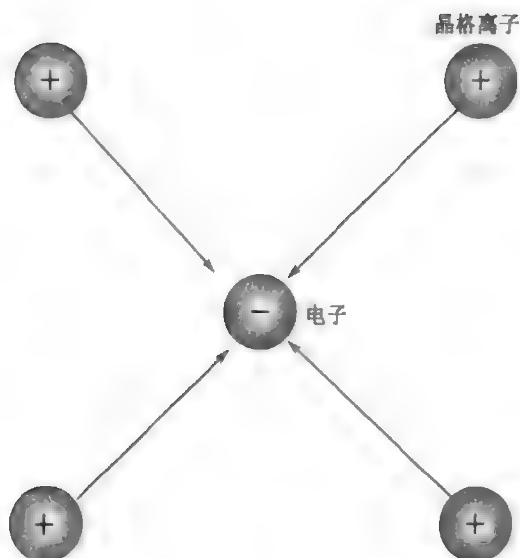


图 27-9

弱耦合,这里的两个电子称为库珀对.在正常情况下电子间倾向于互相排斥.在BCS模型中,单个电子倾向于位于晶格格点上的在其周围的正离子吸引过来,如图27-9所示.这就产生了一个小的净剩正电荷区域,它吸引另一个电子朝向这个区域.在同等的附近位置的两个电子构成一个束缚态,称为库珀对,其中超导材料中晶格上的正离子其作用相当一个中介粒子,它产生吸引力以抵消两个电子间的库仑斥力.

在库珀对中的两个电子其作用像单个粒子.因为两个电子具有相反的自旋,库珀对的净自旋为零.于是库珀对的行为像一个玻色子,它不需要服从泡利不相容原理,所以可以有任何数目的库珀对处于同样的量子态,有同样的能量.此外,在库珀对中两个电子具相等而反向的线动量,其结果是库珀对具有零动量.

拆散一个库珀对的能量 E_g 称为超导能隙.按照BCS理论,$T=0$ 时的能隙与超导体的临界温度有关,其关系为

$$E_g = 3.53kT_c$$

这里 k 是玻尔兹曼常数.能隙 E_g 在 10^{-3}eV数量级,这远小于典型半导体的在1eV数量级的能隙.

例题详解

27.17 对于Hg(水银),在零外界磁场下能保证超导性质的临界温度是4.15K.临界外磁场是0.041T,在这个磁场下不论多少温度超导都不会发生.求出能在2.2K时终止超导的外磁场.

解 ☞ 将上面的数值代进 $T_c(B)$ 的表达式中,我们有

$$T_c(B) = T_{c0}(1 - B/B_c)^{1/2}$$

$$2.2\text{K} = 4.15\text{K}\left(1 - \frac{B}{0.041\text{T}}\right)^{1/2}$$

$$B = 0.27\text{T}$$

27.18 Nb(铌)丝的半径为3.00mm,处在4.5K的温度中.此金属丝在仍旧是超导的情况下可以通过的最大电流是多少?对于Nb,在零外界磁场下保证出现超导性的临界温度是9.26K,而使得超导性在任何温度下都不再出现的外加临界磁场是0.199T.

解 ☞ 将上述数值代入 $T_c(B)$ 的表达式中,我们得到破坏超导性所需的加在金属丝表面的磁场:

$$T_c(B) = T_{c0}(1 - B/B_c)^{1/2}$$

$$4.5\text{K} = (9.26\text{K})\left(1 - \frac{B}{0.188\text{T}}\right)^{1/2}$$

$$B = 0.152\text{T}$$

在金属丝表面上能产生这个磁场的电流 I 可按下列方式求出

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$0.152\text{T} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\text{N/A}^2)I}{2\pi(3.0 \times 10^{-3}\text{m})}$$

$$I = 2.28 \times 10^3\text{A}$$

27.19 计算Sn(锡)的能隙,它的临界温度是3.72K.

解 ☞ 从BCS理论其能隙是

$$E_g = 3.53kT_c = 3.53(1.38 \times 10^{-23}\text{J/K})(3.72\text{K}) = 1.18 \times 10^{-22}\text{J} = 1.13 \times 10^{-3}\text{eV}$$

这个结果与测量值 1.15×10^{-3}eV 相差约为2%.

27.20 在 $T=0$K 时测得In(铟)的能隙是 1.05×10^{-3}eV.求出能够破坏In中库珀对的光子的最大波长.

解 ☞ 为了破坏库珀对，光子的最小能量必须等于 In 的能隙，所以

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_g$$

$$\frac{12.41 \times 10^3 \text{eV} \cdot \text{Å}}{\lambda} = 1.05 \times 10^{-3} \text{eV}$$

$$\lambda = 1.18 \times 10^7 \text{Å}$$

它处于微波范围.

27.21 BCS 理论指出了同位素效应：对于给定材料的各种同位素，其临界温度正比于 $M^{-1/2}$. 对于 Hg(水银)的几种同位素的临界温度是

同位素	^{199}Hg	^{200}Hg	^{204}Hg
T_c/K	4.161	4.153	4.126

从这些数据，计算出表达式 $T_c \propto M^{-\alpha}$ 中的 α 值，并且将 α 与 BCS 理论中预言的数值 1/2 相比较.

解 ☞ 原子的质量近似地正比于它的原子数 A. 取表达式 $T_c \propto A^{-\alpha}$ 的自然对数，我们得到

$$\ln(T_c) = -\alpha \ln(A) + \text{常数}$$

当将 $\ln(T_c)$ 相对于 $\ln A$ 的关系点出，得到图 27-10 中的图形. 常数 α 是这些点的最佳拟合直线的斜率，图上找到 α 是 0.36，它与 BCS 的值 0.5 相当一致.

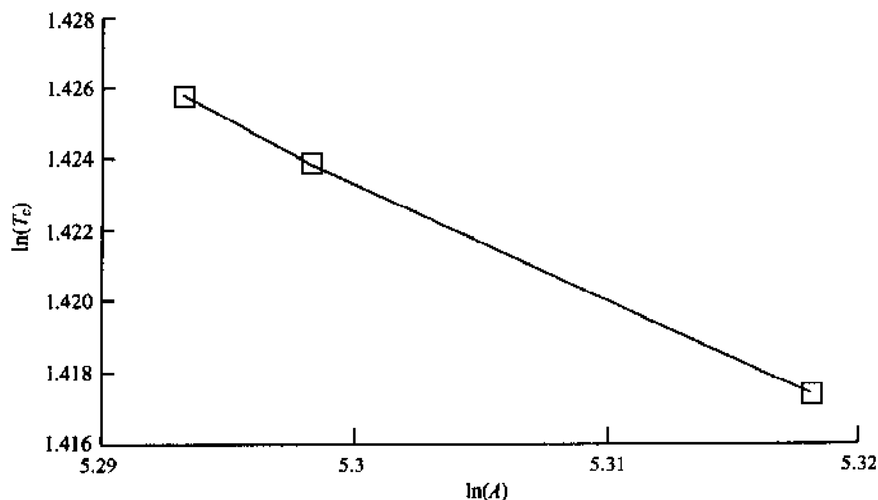


图 27-10

磁通量子

考虑一个面积 A 的超导环，中有电流，放在一个外磁场中. 通过环的净磁通来自外部磁场和环中超导电流的磁场. 量子力学的分析证明通过环的横截面的磁通是量子化的，关系为

$$\Phi_{\text{net}} = n\Phi_0 \qquad (n = 1,2,3\ldots)$$

这里

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.0678 \times 10^{-15} \text{T} \cdot \text{m}^2$$

是磁通的最小单位，称为磁通量子.

27.22 地球磁场是 5.8×10^{-5}T，它进入半径为 2mm 的环中. 在这个环中有多少个通量子？

解 ☞ 通过环的横断面的磁通是

$$\Phi = BA = (5.8 \times 10^{-5} \text{T})\pi(2 \times 10^{-3} \text{m})^2 = 7.3 \times 10^{-10} \text{T} \cdot \text{m}^2$$

从量纲分析，环中的通量子数目是

$$N = (7.3\times10^{-10}\text{T}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{1\text{ 通量子}}{2.1\times10^{-15}\text{T}\cdot\text{m}^2}\right) = 3.5\times10^5$$

27.23 一个 SQUID(超导量子干涉元件)可以将磁通测量得小到 1/10000 个通量子.如 SQUID 由 2mm 环组成,求出可以测量到的最小磁场改变.

解 ☞ 环中的磁场与环上横断面的磁通有关系

$$B = \frac{\Phi}{A}$$

磁场的改变与磁通的改变有关系

$$\Delta B = \frac{\Delta\Phi}{A}$$

对于 $\Delta\Phi = 10^{-4}\Phi_0$ 的磁通改变,磁场的改变是

$$\Delta B_{\min} = \frac{10^{-4}\Phi_0}{A} = \frac{(10^{-4})(2.07\times10^{-15}\text{T}\cdot\text{m}^2)}{\pi(2\times10^{-3}\text{m})^2} = 1.65\times10^{-14}\text{T}$$

约瑟夫森效应

一个约瑟夫森结由两片超导体中间夹一层几纳米厚的绝缘材料隔开而成,库珀对可以穿透绝缘材料而生成电流.在由不同的超导体生成的结的两端即使不加上电压,因为在这两种超导体中库珀对的波函数之间的相位差,其结果是出现了直流电流,这个现象称为直流约瑟夫森效应.令人惊奇的是,当直流电压 V 加到结的两端,出现一个交变电流,其频率是

$$f = \frac{2eV}{h}$$

这种现象称为交流约瑟夫森效应.因为频和电压可以测得非常准确,交流约瑟夫森效应提供了一个精密测量比值 e/h 的方法.

27.24 当加在结上的直流电压是 1μV,求出所产生的交流电流的频率.

解 ☞

$$f = \frac{2eV}{h} = \frac{2(1.602\times10^{-19}\text{C})(10^{-6}\text{V})}{6.626\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}} = 4.836\times10^8\text{Hz} = 483.6\text{MHz}$$

补充习题

27.25 在零外加磁场下,Pb(铅)在 7.19K 时出现超导性.当加上 0.080T 磁场后,在任何温度下都不再出现超导性.求出在 2.0K 下终止超导所需要的外磁场.

答案:0.074T

27.26 在零外加磁场下,Sn(锡)在 3.72K 出现超导性.当加上 0.031T 磁场后,在任何温度下都不再发生超导.设在某温度下加上磁场 0.0081T 即终止超导,求温度.

答案:3.2K

27.27 在 $T = 0$K 时测得 In(铟)的能隙是 1.05×10^{-3}eV.利用 BCS 理论中的能隙表达式去计算 In 的临界温度,并且将它与测量值 3.408K 相比较.

答案:3.45K;1% 误差

27.28 对于某种材料,拆开库珀对的光子的最大波长为 4.55×10^6Å.求出材料的能隙.

答案:2.73×10^{-3}eV,它相应于 Pb(铅)

27.29 验证通量子的数值是 $\Phi_0 = 2.0678\times10^{-15}\text{T}\cdot\text{m}^2$.

27.30 在约瑟夫森结上观察到频率为 2000MHz 的交流电流.求出所加的直流电压.

答案:4.136μV

附　　录

在常用单位下的某些基本常数

$$c = \text{光速} = 2.998 \times 10^{8}\text{m/s}$$

$$e = \text{电子电荷大小} = 1.602 \times 10^{-19}\text{C}$$

$$h = \text{普朗克常数} = 6.626 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$$

$$= 4.136 \times 10^{-15}\text{eV} \cdot \text{s}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s} = 0.658 \times 10^{-15}\text{eV} \cdot \text{s}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \text{库仑常数} = 8.988 \times 10^{9}\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

$$k = \frac{R}{N} = \text{玻尔兹曼常数} = 1/38 \times 10^{-23}\text{J/K}$$

$$= 8.617 \times 10^{-5}\text{eV/K}$$

一些常用单位换算关系

$$1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\text{J}$$

$$1\text{Å} = 10^{-10}\text{m} = 10^{5}\text{fm}$$

$$hc = 19.865 \times 10^{-26}\text{J} \cdot \text{m} = 12.41 \times 10^{3}\text{eV} \cdot \text{Å} = 1241\text{MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\hbar c = 3.165 \times 10^{-26}\text{J} \cdot \text{m} = 1973 \times 1\text{eV} \cdot \text{Å} = 197.3\text{MeV} \cdot \text{fm}$$

$$ke^2 = 1.44\text{MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\frac{ke^2}{\hbar c} = \text{精细结构常数} \approx \frac{1}{137}$$

$$\frac{e\hbar}{2m_e} = \text{玻尔磁子} = 9.27 \times 10^{-24}\text{J/T}$$

$$= 5.79 \times 10^{-5}\text{eV/T}$$

某些粒子的质量

粒子	静止质量 m_0 (kg)	m_0c^2 (MeV)
电子	9.109×10^{-31}	0.511
质子	1.673×10^{-27}	938.3
中子	1.675×10^{-27}	939.6
原子质量单位(1u)	1.661×10^{-27}	931.5

中性原子质量

表中的第 5 列在质量数上的星号“ * ”表示放射性同位素，它的半衰期在第 7 列给出．

Z	元素	符号	化学原子量	A	质量(u)	$T_{1/2}$
0	中子	*n*		1*	1.008 665	12 min
1	质子	H	1.0079	1	1.007 825	
	氘	D		2	2.014 102	
	氚	T		3*	3.016 050	12.26a
2	氦	He	4.0026	3	3.016 030	
				4	4.002 603	
				6*	6.018 892	0.802s
3	锂	Li	6.939	6	6.015 125	
				7	7.016 004	
4	铍	Be	9.0122	7*	7.016 929	53.4d
				9	9.012 186	
				10*	10.013 534	2.7×10^{6}a
5	硼	B	10.811	10	10.012 939	
				11	11.009 305	
6	碳	C	12.01115	12	12.000 000	
				13	13.003 354	
				14*	14.003 242	5730a
7	氮	N	14.0067	14	14.003 074	
				15	15.000 108	
8	氧	O	15.9994	15*	15.003 070	122s
				16	15.994 915	
				17	16.999 133	
				18	17.999 160	
9	氟	F	18.9984	19	18.998 405	
10	氖	Ne	20.183	20	19.992 440	
				21	20.993 849	
				22	21.991 385	
11	钠	Na	22.9898	22*	21.994 437	2.60a
				23	22.989 771	
12	镁	Mg	24.312	23*	22.994 125	12s
				24	23.985 042	
				25	24.986 809	
				26	25.982 593	
13	铝	Al	26.9815	26*	25.986 892	7.4×10^{5}a
				27	26.981 539	
14	硅	Si	28.086	28	27.976 929	
				29	28.976 496	
				30	29.973 763	
				32*	31.974 020	≈700a
15	磷	P	30.9738	31	30.973 765	
16	硫	S	32.064	32	31.972 074	
				33	32.971 462	
				34	33.967 865	
				36	35.967 089	
17	氯	Cl	35.453	35	34.968 851	
				36*	35.968 309	3×10^{5}a
				37	36.965 898	
18	氩	A	39.948	36	35.967 544	
				38	37.962 728	
				39*	38.964 317	270a
				40	39.962 384	
				42*	41.963 048	33a
19	钾	K	39.102	39	38.963 710	
				40*	39.964 000	1.3×10^{9}a
(19)	(钾)			41	40.961 832	
20	钙	Ca	40.08	39*	38.970 691	0.877s
				40	39.962 589	

续表

Z	元素	符号	化学原子量	A	质量(u)	$T_{1/2}$
				41*	40.962 275	7.7×10^4a
				42	41.958 625	
				43	42.958 780	
				44	43.955 492	
				46	45.953 689	
				48	47.952 531	
21	钪	Sc	44.956	45	44.955 920	
				50*	49.951 730	1.73 min
22	钛	Ti	47.90	44*	43.959 572	47a
				46	45.952 632	
				47	46.951 768	
				48	47.947 950	
				49	48.947 870	
				50	49.944 786	
23	钒	V	50.942	50*	49.947 164	$\approx6\times10^{15}$a
				51	50.943 961	
24	铬	Cr	51.996	50	49.946 055	
				52	51.940 513	
				53	52.940 653	
				54	53.938 882	
25	锰	Mn	54.9380	50*	49.954 215	0.29s
				55	54.938 050	
26	铁	Fe	55.847	54	53.939 616	
				55*	54.938 299	2.4a
				56	55.939 395	
				57	56.935 398	
				58	57.933 282	
				60*	59.933 964	$\approx10^5$a
27	钴	Co	58.9332	59	58.933 189	
				60*	59.933 813	5.24a
28	镍	Ni	58.71	58	57.935 342	
				59*	58.934 342	8×10^4a
				60	59.930 787	
				61	60.931 056	
				62	61.928 342	
				63*	62.929 664	92a
				64	61.927 958	
29	铜	Cu	63.54	63	62.929 592	
				65	64.927 786	
30	锌	Zn	65.37	64	63.929 145	
				66	65.926 052	
				67	66.927 145	
				68	67.924 857	
				70	69.925 334	
31	镓	Ga	69.72	69	68.925 574	
				71	70.924 706	
32	锗	Ge	72.59	70	69.924 252	
				72	71.922 082	
				73	72.923 462	
				74	73.921 181	
				76	75.921 405	
33	砷	As	74.9216	75	74.921 596	
34	硒	Se	78.96	74	73.922 476	
				76	75.919 207	
				77	76.919 911	
				78	77.917 314	

续表

Z	元素	符号	化学原子量	A	质量(u)	$T_{1/2}$
				79*	78.918 494	7×10^{4}a
(34)	(硒)			80	79.916 527	
				82	81.916 707	
35	溴	Br	79.909	79	78.918 329	
				81	80.916 292	
36	氪	Kr	83.80	78	77.920 403	
				80	79.916 380	
				81*	80.916 610	2.1×10^{5}a
				82	81.913 482	
				83	82.914 131	
				84	83.911 503	
				85*	84.912 523	10.76a
				86	85.910 616	
37	铷	Rb	85.47	85	84.911 800	
				87*	86.909 186	5.2×10^{10}a
38	锶	Sr	87.62	84	83.913 430	
				86	85.909 285	
				87	86.908 892	
				88	87.905 641	
				90*	89.907 747	28.8a
39	钇	Y	88.905	89	88.905 872	
40	锆	Zr	91.22	90	89.904 700	
				91	90.905 642	
				92	91.905 031	
				93*	92.906 450	9.5×10^{5}a
				94	93.906 313	
				96	95.908 286	
41	铌	Nb	92.906	91*	90.906 860	(long)
				92*	91.907 211	$\approx10^{7}$a
				93	92.906 382	
				94*	93.907 303	2×10^{4}a
42	钼	Mo	95.94	92	91.906 810	
				93*	92.906 830	$\approx10^{4}$a
				94	93.905 090	
				95	94.905 839	
				96	95.904 674	
				97	96.906 021	
				98	97.905 409	
				100	99.907 475	
43	锝	Tc		97*	96.906 340	2.6×10^{6}a
				98*	97.907 110	1.5×10^{6}a
				99*	98.906 249	2.1×10^{5}a
44	钌	Ru	101.07	96	95.907 598	
				98	97.905 289	
				99	98.905 936	
				100	99.904 218	
				101	100.905 577	
				102	101.904 348	
				104	103.905 430	
45	铑	Rh	102.905	103	102.905 511	
46	钯	Pd	106.4	102	101.905 609	
				104	103.904 011	
				105	104.905 064	
				106	105.903 479	
				107*	106.905 132	7×10^{6}a
				108	107.903 891	

续表

Z	元素	符号	化学原子量	*A*	质量(u)	$T_{1/2}$
				110	109.905 164	
47	银	Ag	107.870	107	106.905 094	
				109	108.904 756	
48	镉	Cd	112.40	106	105.906 463	
				108	107.904 187	
(48)	(镉)			109*	108.904 928	453d
				110	109.903 012	
				111	110.904 188	
				112	111.902 762	
				113	112.904 408	
				114	113.903 360	
				116	115.904 762	
49	铟	In	114.82	113	112.904 089	
				115*	114.903 871	6×10^{14}a
50	锡	Sn	118.69	112	111.904 835	
				114	113.902 773	
				115	114.903 346	
				116	115.901 745	
				117	116.902 958	
				118	117.901 606	
				119	118.903 313	
				120	119.902 198	
				121*	120.904 227	25a
				122	121.903 441	
				124	123.905 272	
51	锑	Sb	121.75	121	120.903 816	
				123	122.904 213	
				125*	124.905 232	
52	碲	Te	127.60	120	119.904 023	
				122	121.903 064	
				123*	122.904 277	1.2×10^{13}a
				124	123.902 842	
				125	124.904 418	
				126	125.903 322	
				128	127.904 476	
				130	129.906 238	
53	碘	I	126.9044	127	126.904 070	
				129*	128.904 987	1.6×10^{7}a
54	氙	Xe	131.30	124	123.906 120	
				126	125.904 288	
				128	127.903 540	
				129	128.904 784	
				130	129.903 509	
				131	130.905 085	
				132	131.904 161	
				134	133.905 815	
				136	135.907 221	
55	铯	Cs	132.905	133	132.905 355	
				134*	133.906 823	2.1a
				135*	134.905 770	2×10^{6}a
				137*	133.906 770	30a
56	钡	Ba	137.34	130	129.906 245	
				132	131.905 120	
				133*	132.905 879	7.2a
				134	133.904 612	
				135	134.905 550	

续表

Z	元素	符号	化学原子量	A	质量(u)	$T_{1/2}$
				136	135.904 300	
				137	136.905 500	
				138	137.905 000	
57	镧	La	138.91	137*	136.906 040	6×10^{4}a
				138*	137.906 910	1.1×10^{11}a
				139	138.906 140	
58	铈	Ce	140.12	136	135.907 100	
				138	137.905 830	
				140	139.905 392	
(58)	(铈)			142*	141.909 140	5×10^{15}a
59	镨	Pr	140.907	141	140.907 596	
60	钕	Nd	144.24	142	141.907 663	
				143	142.909 779	
				144*	143.910 039	2.1×10^{15}a
				145	144.912 538	
				146	145.913 086	
				148	147.916 869	
				150	149.920 960	
61	钷	Pm		145*	144.912 691	18a
				146*	145.914 632	1600d
				147*	146.915 108	2.6a
62	钐	Sm	150.35	144	143.911 989	
				146*	145.912 992	1.2×10^{8}a
				147*	146.914 867	1.08×10^{11}a
				148*	147.914 791	1.2×10^{13}a
				149*	148.917 180	4×10^{14}a
				150	149.917 276	
				151*	150.919 919	90a
				152	151.919 756	
				154	153.922 282	
63	铕	Eu	151.96	151	150.919 838	
				152*	151.921 749	12.4a
				153	152.921 242	
				154*	153.923 053	16a
				155*	154.922 930	1.8a
64	钆	Gd	157.25	148*	147.918 101	85a
				150*	149.918 605	1.8×10^{6}a
				152*	151.919 794	1.1×10^{14}a
				154	153.920 929	
				155	154.922 664	
				156	155.922 175	
				157	156.924 025	
				158	157.924 178	
				160	159.927 115	
65	铽	Tb	158.925	159	158.925 351	
66	镝	Da	162.50	156*	155.923 930	2×10^{14}a
				158	157.924 449	
				160	159.925 202	
				161	160.926 945	
				162	161.926 803	
				163	162.928 755	
				164	163.929 200	
67	钬	Ho	164.930	165	164.930 421	
				166*	165.932 289	1.2×10^{3}a
68	铒	Er	167.26	162	161.928 740	
				164	163.929 287	

续表

Z	元素	符号	化学原子量	A	质量(u)	$T_{1/2}$
				166	165.930 307	
				167	166.932 060	
				168	167.932 383	
				170	169.935 560	
69	铥	Tm	168.934	169	168.934 245	
				171*	170.936 530	1.9a
70	镱	Yb	173.04	168	167.934 160	
				170	169.935 020	
				171	170.936 430	
				172	171.936 360	
				173	172.938 060	
				174	173.938 740	
				176	175.942 680	
71	镥	Lu	174.97	173*	172.938 800	1.4a
				175	174.940 640	
				176*	175.942 660	2.2×10^{10}a
72	铪	Hf	178.49	174*	173.940 360	2.0×10^{15}a
				176	175.941 570	
				177	176.943 400	
				178	177.943 880	
				179	178.946 030	
				180	179.946 820	
73	钽	Ta	180.948	180	179.947 544	
				181	180.948 007	
74	钨	W	183.85	180	179.947 000	
				182	181.948 301	
				183	182.950 324	
				184	183.951 025	
				186	185.954 440	
75	铼	Re	186.2	185	184.953 059	
				187*	186.955 833	5×10^{10}a
76	锇	Os	190.2	184	183.952 750	
				186	185.953 870	
				187	186.955 832	
				188	187.956 081	
				189	188.958 300	
				190	189.958 630	
				192	191.961 450	
				194*	193.965 229	6.0a
77	铱	Ir	192.2	191	190.960 640	
				193	192.963 012	
78	铂	Pt	195.09	190*	189.959 950	7×10^{11}a
				192	191.961 150	
				194	193.962 725	
				195	194.964 813	
				196	195.964 967	
				198	197.967 895	
79	金	Au	196.967	197	196.966 541	
80	汞	Hg	200.59	196	195.965 820	
				198	197.966 756	
				199	198.968 279	
				200	199.968 327	
				201	200.970 308	
				202	201.970 642	
				204	203.973 495	
81	铊	Tl	204.19	203	202.972 353	

续表

Z	元素	符号	化学原子量	A	质量(u)	$T_{1/2}$
				204*	203.973 865	3.75a
				205	204.974 442	
		Ra E''		206*	205.976 104	4.3min
		Ac C''		207*	206.977 450	4.78min
		Th C''		208*	207.982 013	3.1min
		Ra C''		210*	209.990 054	1.3min
82	铅	Pb	207.19	202*	201.927 997	3×10^5a
				204*	203.973 044	1.4×10^{17}a
				205*	204.974 480	3×10^7a
				206	205.974 468	
				207	206.975 903	
				208	207.976 650	
		Ra D		210*	209.984 187	22a
		Ac B		211*	210.988 742	36.1min
		Th B		212*	211.991 905	10.64h
		Ra B		214*	213.999 764	26.8min
83	铋	Bi	209.980	207*	206.978 438	30a
(83)	(铋)			208*	207.979 731	3.7×10^5a
				209	208.980 394	
		Ra E		210*	209.984 121	5.1d
		Th C		211*	210.987 300	2.15min
				212*	211.991 876	60.6min
		Ra C		214*	213.998 686	19.7min
				215*	215.001 830	8min
84	钋	Po		209*	208.982 426	103a
		Ra F		210*	209.982 876	138.4d
		Ac C'		211*	210.986 657	0.52s
		Th C'		212*	211.989 629	0.30μs
		Ra C'		214*	213.995 201	164μs
		Ac A		215*	214.999 423	0.0018s
		Th A		216*	216.001 790	0.15s
		Ra A		218*	218.008 930	3.05μs
85	砹	At		215*	214.998 663	≈100μs
				218*	218.008 607	1.3s
				219*	219.011 290	0.9min
86	氡	Rn				
		An		219*	219.009 481	4.0s
		Tn		220*	220.011 401	56s
		Rn		222*	222.017 531	3.823d
87	钫	Fr				
		Ac K		223*	223.019 736	22min
88	镭	Ra	226.05			
		Ac X		223*	223.018 501	11.4d
		Th X		224*	224.020 218	3.64d
		Ra		226*	226.025 360	1620a
		Ms Th_1		228*	228.031 139	5.7a
89	锕	Ac		227*	227.027 753	21.2a
		Ms Th_2		228*	228.031 080	6.13h
90	钍	Th	232.038			
		Rd Ac		227*	227.027 706	18.17d
		Rd Th		228*	228.028 750	1.91a
				229*	229.031 652	7300a
		Io		230*	230.033 087	76 000a
		UY		231*	231.036 291	25.6h
		Th		232*	232.038 124	1.39×10^{10}a
		UX_1		234*	234.043 583	24.1d

续表

Z	元素	符号	化学原子量	A	质量(u)	$T_{1/2}$
91	镤	Pa	231.0359	231*	231.035 877	32 480a
		UZ		234*	234.043 298	6.66h
92	铀	U	238.03	230*	230.033 937	20.8d
				231*	231.036 264	4.3d
				232*	232.037 168	72a
				233*	233.039 522	1.62×10^{5}a
				234*	234.040 904	2.48×10^{5}a
		Ac U		235*	235.043 915	7.13×10^{8}a
				236*	236.045 637	2.39×10^{7}a
		UI		238*	238.048 608	4.51×10^{9}a
93	镎	Np	237.0480	235*	235.044 049	410d
				236*	236.046 624	5000a
				237*	237.048 056	2.14×10^{6}a
94	钚	Pu	239.0522	236*	236.046 071	2.85a
				238*	238.049 511	89a
				239*	239.052 146	24 360a
				240*	240.053 882	6700a
				241*	241.056 737	13a
				242*	242.058 725	3.79×10^{5}a
				244*	244.064 100	7.6×10^{7}a

译者后记

《近代物理学》译稿由中国科技大学张玉民教授校，谨致谢忱．今将校者指出的 9.25 题的正确结果录之如下：

$$p_{ph}=p_e \quad 或 \quad \frac{h\nu}{c}=p_e$$

$$E_{ph}=E_e \quad 或 \quad h\nu=\sqrt{(p_ec)^2+(m_0c^2)^2}-m_0c^2 \tag{1}$$

将式(1)两边平方并推导有

$$(h\nu)^2=(p_ec)^2+(m_0c^2)^2+(m_0c^2)^2-2m_0c^2\sqrt{(p_ec)^2+(m_0c^2)^2}$$

$$=(p_ec)^2-2m_0c^2h\nu \rightarrow \frac{h\nu}{c}<p_e$$

这与动量表达式相抵触．

译稿承蒙中国科大程福臻教授，张泰永教授及科学出版社鄢德平编辑的鼓励及支持，谨表感谢．

译者

2001.4.26.